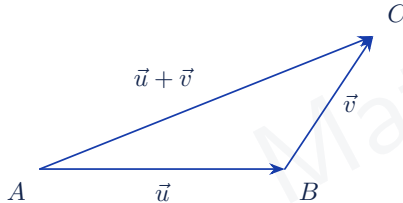


1 พิกัดเวกเตอร์ พิกัด และจุดแบ่งส่วน

1.1 ขนาด ทิศทาง และการบวก

เวกเตอร์เท่ากันเมื่อขนาดเท่ากันและทิศเดียวกัน ส่วน $\vec{0}$ มีขนาดศูนย์และไม่มีทิศทางแน่นอน

$$\vec{BA} = -\vec{AB}, \quad \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

การบวกเวกเตอร์ใช้การต่อหัวกับท้าย หรือกฎสี่เหลี่ยมด้านขนาน และผลรวมตามเส้นทางปิดเป็น $\vec{0}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

1.2 การคูณด้วยสเกลาร์

ให้ k เป็นจำนวนจริง

$$|k\vec{u}| = |k| |\vec{u}|, \quad k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

สเกลาร์ ผลต่อเวกเตอร์ $\vec{u} \neq \vec{0}$

$k > 0$ ทิศเดียวกัน ขนาดเป็น k เท่า

$k < 0$ ทิศตรงข้าม ขนาดเป็น $|k|$ เท่า

$k = 0$ ได้เวกเตอร์ศูนย์

1.3 ส่วนประกอบ ขนาด และฐาน

ในระบบพิกัดฉาก $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน x, y, z ด้านบวก ตามลำดับ

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \quad |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

บวก ลบ และคูณสเกลาร์แยกตามส่วนประกอบ ในระนาบให้ส่วนประกอบแกน z เป็นศูนย์

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \quad (\vec{u} \neq \vec{0})$$

เวกเตอร์ขนาด $L > 0$ ที่มีแนวเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\vec{w} = \pm L\hat{u}$
เครื่องหมายบวกให้ทิศเดียวกัน เครื่องหมายลบให้ทิศตรงข้าม

ตัวอย่างย่อ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ มี $|\vec{u}| = 5$ และ $\hat{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$

ฐานในระนาบ

ถ้า $\vec{u}, \vec{v}$ ไม่ขนานกัน การเขียนเวกเตอร์ในระนาบเป็นผลรวมเชิงเส้นของทั้งคู่มีแบบเดียว

$$a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v} \Rightarrow a = c, b = d$$

1.4 เวกเตอร์ตำแหน่งและจุดบนเส้นตรง

ให้ O เป็นจุดอ้างอิงร่วม ถ้า $A(x_1, y_1, z_1)$ และ $B(x_2, y_2, z_2)$ จะได้

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

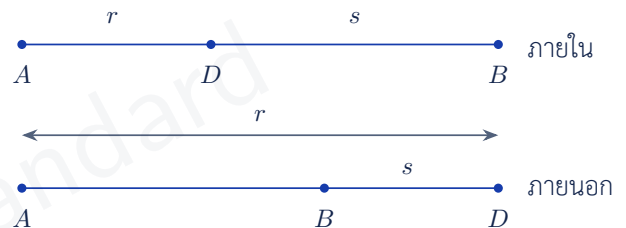
จุด X บนเส้นตรงผ่านจุดต่างกัน A, B เขียนได้เป็น

$$\vec{OX} = \vec{OA} + t\vec{AB}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$0 \leq t \leq 1$ อยู่บนส่วนของเส้นตรง AB และ $t = \frac{1}{2}$ ให้จุดกึ่งกลาง ส่วน $t < 0$ หรือ $t > 1$ อยู่บนส่วนต่อ

1.5 จุดแบ่งภายในและภายนอก

ให้ $A \neq B$, $AD : DB = r : s$ โดย $r, s > 0$ และใช้จุดอ้างอิง O เดียวกัน



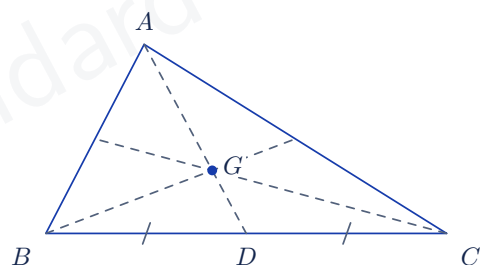
$$\vec{OD} = \frac{s\vec{OA} + r\vec{OB}}{r + s} \quad \text{แบ่งภายใน}$$

$$\vec{OD} = \frac{r\vec{OB} - s\vec{OA}}{r - s} \quad \text{แบ่งภายนอก}$$

สูตรแบ่งภายนอกต้องมี $r \neq s$ หาก $r > s$ จุด D อยู่เลย B และหาก $r < s$ จุด D อยู่เลย A จุดกึ่งกลาง M ของ AB มีเวกเตอร์ตำแหน่ง

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

1.6 จุดศูนย์กลางมวลของสามเหลี่ยม



ให้ G เป็นจุดศูนย์กลางมวลของสามเหลี่ยม ABC และ D เป็นจุดกึ่งกลาง BC

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AD}, \quad AG : GD = 2 : 1$$

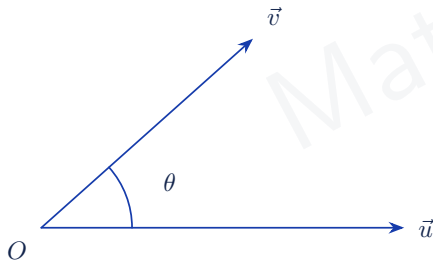
2 ผลคูณเชิงสเกลาร์ ขนาด และมุม

2.1 นิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์

ให้ $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์เป็นจำนวนจริง ถ้าทั้งสองเวกเตอร์ไม่เป็นศูนย์ และมีมุมระหว่างกัน $\theta \in [0, \pi]$ จะได้



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

มุมระหว่างเวกเตอร์ต้องใช้เวกเตอร์ที่มีจุดต้นร่วมกัน

2.2 สมบัติและสูตรขนาด

ให้ a, b เป็นจำนวนจริง

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$|a\vec{u} + b\vec{v}|^2 = a^2|\vec{u}|^2 + 2ab\vec{u} \cdot \vec{v} + b^2|\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$$

รวมส่วนประกอบก่อนหาขนาด โดยทั่วไป $|\vec{u} + \vec{v}| \neq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

2.3 อสมการที่ใช้บ่อย

อสมการโคชี-ชวาร์ซ

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$$

อสมการสามเหลี่ยมและขอบเขตล่าง

$$||\vec{u}| - |\vec{v}|| \leq |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

ในโคชี-ชวาร์ซเกิดความเท่ากันเมื่อมีเวกเตอร์ศูนย์ หรือเวกเตอร์ทั้งสองขนานกัน

2.4 เครื่องหมายกับมุม และการตั้งฉาก

ให้ $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$

ผลคูณ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ มุมระหว่างเวกเตอร์

บวก $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

ศูนย์ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ลบ $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$

จึงใช้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ตรวจสอบการตั้งฉากของเวกเตอร์ไม่เป็นศูนย์ได้ ส่วน $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$ เสมอ แต่ไม่กำหนดมุม สำหรับมุม $\angle BAC$ ใช้ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{AC}$ การกลับทิศเวกเตอร์หนึ่งตัวเปลี่ยนมุม θ เป็น $\pi - \theta$

2.5 ไซน์และแทนเจนต์ของมุมในระนาบ

ให้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$ ไม่เป็นศูนย์ และ $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\sin \theta = \frac{|ad - bc|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$\tan \theta = \frac{|ad - bc|}{ac + bd} \quad (ac + bd \neq 0)$$

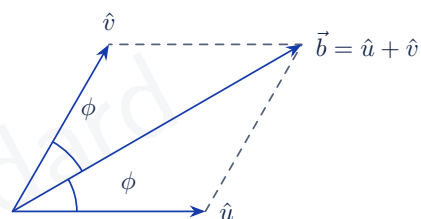
ไซน์ไม่เป็นลบในช่วงนี้ ส่วนเครื่องหมายแทนเจนต์ขึ้นกับเครื่องหมายของ $ac + bd$

ตัวอย่างย่อ $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ ให้ $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จึงมี $\theta = 135^\circ$

2.6 เวกเตอร์แบ่งครึ่งมุมภายใน

ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ ไม่เป็นศูนย์และไม่ชี้ทิศตรงข้ามกัน กำหนด

$$\vec{b} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$



ในรูป $\hat{u}, \hat{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของสองทิศ ผลบวก $\vec{b}$ จึงชี้ตามแนวแบ่งครึ่งมุมภายใน หากต้องการหนึ่งหน่วยใช้ $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

2.7 เงื่อนไขทำมุมเท่ากัน

ให้ $\vec{s}, \vec{u}, \vec{v}$ ไม่เป็นศูนย์

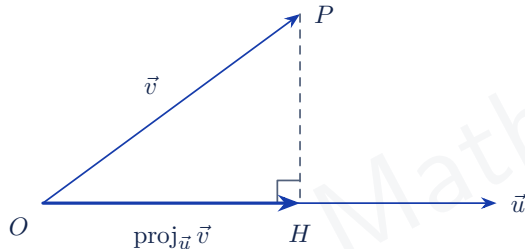
$$\begin{aligned} \angle(\vec{s}, \vec{u}) &= \angle(\vec{s}, \vec{v}) \\ \iff \frac{\vec{s} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} &= \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \end{aligned}$$

ตัด $|\vec{s}|$ ร่วมกันได้ ส่วน $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ ต้องคงไว้หากขนาดไม่เท่ากัน

3 การฉาย โคไซน์แสดงทิศทาง และระยะน้อยที่สุด

3.1 องค์ประกอบกับเวกเตอร์ฉาย

ให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ เป็นแนวอ้างอิง และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่จะฉายลงบนแนว $\vec{u}$



$$\text{comp}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

$$|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

องค์ประกอบเป็นจำนวนจริงที่มีเครื่องหมาย ส่วนขนาดของเวกเตอร์ฉายเป็นจำนวนไม่เป็นลบ

3.2 การแยกส่วนขนานและส่วนตั้งฉาก

เมื่อ $\vec{u} \neq \vec{0}$ กำหนด

$$\vec{v}_{\parallel} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}, \quad \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

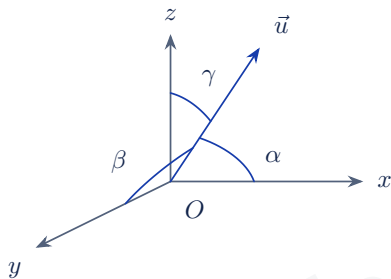
$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \quad \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{u} = 0$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_{\parallel}|^2 + |\vec{v}_{\perp}|^2$$

ตัวอย่างย่อ ฉาย $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ลงบนแนว $\vec{u} = \vec{i}$ ได้ $\vec{v}_{\parallel} = 2\vec{i}$ และ $\vec{v}_{\perp} = 3\vec{j}$

3.3 โคไซน์แสดงทิศทางในสามมิติ

ให้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \neq \vec{0}$ ทำมุม α, β, γ กับแกน x, y, z ตามลำดับ



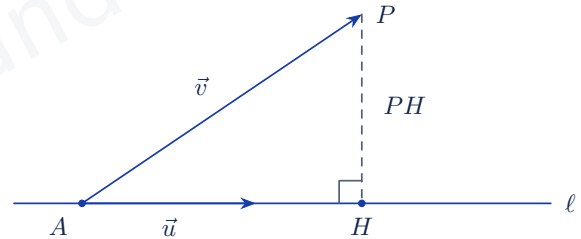
$$\cos \alpha = \frac{a}{|\vec{u}|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{|\vec{u}|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{|\vec{u}|}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

โคไซน์แต่ละค่ามีเครื่องหมายตรงกับส่วนประกอบตามแกนนั้น และมุมแต่ละมุมอยู่ในช่วง $[0, \pi]$

3.4 จุดฉายและระยะจากจุดถึงเส้นตรง

ให้เส้นตรง ℓ ผ่าน A มีทิศทาง $\vec{u} \neq \vec{0}$ สำหรับจุด P กำหนด $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$



จุดฉาย H บนเส้นตรงให้ระยะ PH น้อยที่สุด

$$t_* = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}, \quad \overrightarrow{AH} = t_* \vec{u}$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t_* \vec{u}$$

$$PH = \sqrt{|\vec{v}|^2 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2}}$$

โดย O เป็นจุดอ้างอิงเดียวกับเวกเตอร์ตำแหน่งของ A, H และ PH เป็นความยาวไม่เป็นลบ

3.5 ระยะจากจุดถึงส่วนของเส้นตรง

ให้ $A \neq B$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ และคำนวณ $t_* = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}$



ค่าพารามิเตอร์ จุดที่ใกล้ P ที่สุดบน AB

$t_* < 0$ A

$0 \leq t_* \leq 1$ $H = A + t_* \overrightarrow{AB}$

$t_* > 1$ B

ในตาราง $A + t_* \overrightarrow{AB}$ หมายถึงเลื่อนจากจุด A ตามเวกเตอร์ $t_* \overrightarrow{AB}$ ต้องตรวจว่าจุดฉายอยู่บนส่วนของเส้นตรงหรืออยู่บนส่วนต่อก่อนเลือกสูตรระยะ

3.6 การหาจุดตัดของเส้นตรงด้วยเวกเตอร์

ให้เส้นแรกผ่าน A มีทิศ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และเส้นที่สองผ่าน B มีทิศ $\vec{v} \neq \vec{0}$ จุดตัดต้องมีตำแหน่งตรงกัน

$$\overrightarrow{OA} + t\vec{u} = \overrightarrow{OB} + s\vec{v}$$

เทียบส่วนประกอบเพื่อหา $t, s \in \mathbb{R}$ และตรวจทุกสมการ ในสามมิติ เส้นตรงที่ไม่ขนานกันอาจไม่ตัดกัน

- หากจำกัดเป็นส่วนของเส้นตรงและใช้เวกเตอร์ทิศทางจากปลายหนึ่งถึงอีกปลาย ต้องมีพารามิเตอร์อยู่ในช่วง $[0, 1]$

4 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ เวกเตอร์ปกติ และพื้นที่

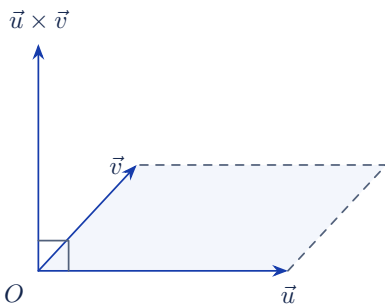
4.1 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ในสามมิติ

ให้ $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ คำนวณได้จากแบบแผน

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

จัดตั้งนี้เป็นแบบแผนช่วยจำการคำนวณ โดยผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์



เมื่อผลคูณไม่เป็นศูนย์ จะตั้งฉากกับทั้ง $\vec{u}$, $\vec{v}$ และมีทิศทางกฎมือขวา

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

สูตรนี้ใช้เมื่อ $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$

4.2 สมบัติและลำดับการคูณ

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v}), \quad \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$(a\vec{u}) \times (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \times \vec{v})$$

เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ ผลคูณเชิงเวกเตอร์แจกแจงได้ แต่โดยทั่วไปเปลี่ยนหมู่ไม่ได้ ถ้าสองเวกเตอร์ขนานกัน หรือมีตัวใดเป็นศูนย์ จะมีผลคูณเป็น $\vec{0}$

4.3 เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยและเอกลักษณ์

เมื่อ $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของระนาบที่เกิดจาก $\vec{u}, \vec{v}$ คือ

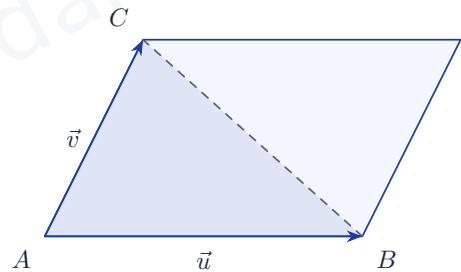
$$\hat{n} = \pm \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

เครื่องหมาย $\pm$ แสดงทิศปกติสองทิศที่ตรงข้ามกัน

4.4 พื้นที่จากเวกเตอร์ด้าน

เลือกเวกเตอร์สองด้านที่มีจุดต้นร่วมกัน



$$\text{Area}_{\text{ด้านขนาน}} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$\text{Area}_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

ขนาดของผลคูณทำให้พื้นที่ไม่ติดลบ การกลับลำดับผลคูณไม่เปลี่ยนพื้นที่

4.5 พื้นที่ในระนาบจากส่วนประกอบ

ให้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ และ $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$ เติมส่วนประกอบแกน z เป็นศูนย์ จะได้

$$\vec{u} \times \vec{v} = (ad - bc)\vec{k}$$

$$\text{Area}_{\text{ด้านขนาน}} = |ad - bc|$$

$$\text{Area}_{\text{สามเหลี่ยม}} = \frac{1}{2} |ad - bc|$$

ตัวอย่างย่อ ด้านที่ออกจากจุดยอดรวมคือ $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ให้ $ad - bc = 5$

$$\text{Area}_{\text{ด้านขนาน}} = 5, \quad \text{Area}_{\text{สามเหลี่ยม}} = \frac{5}{2}$$

พื้นที่มีหน่วยเป็นตารางหน่วย เมื่อส่วนประกอบมีหน่วยเป็นหน่วยความยาว

4.6 การเปลี่ยนเวกเตอร์ด้านและอัตราส่วนพื้นที่

ให้ $\vec{U} = a\vec{u} + b\vec{v}$, $\vec{V} = c\vec{u} + d\vec{v}$ โดย $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ จะได้

$$\vec{U} \times \vec{V} = (ad - bc)(\vec{u} \times \vec{v})$$

$$|\vec{U} \times \vec{V}| = |ad - bc| |\vec{u} \times \vec{v}|$$

ถ้าพื้นที่เดิมเป็นบวก อัตราส่วนพื้นที่ใหม่ต่อพื้นที่เดิมจึงเท่ากับ $|ad - bc|$ เมื่อเปรียบเทียบรูปชนิดเดียวกัน ถ้า $ad - bc = 0$ เวกเตอร์ด้านใหม่ไม่สร้างพื้นที่บวก

5 ผลคูณสามชั้น ปริมาตร และการประยุกต์

5.1 ผลคูณสามชั้นเชิงสเกลาร์

ให้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์สามมิติ ผลคูณสามชั้นเป็นจำนวนจริง

$$T = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

ส่วนประกอบของแต่ละแถวเรียงตามแกน x, y, z

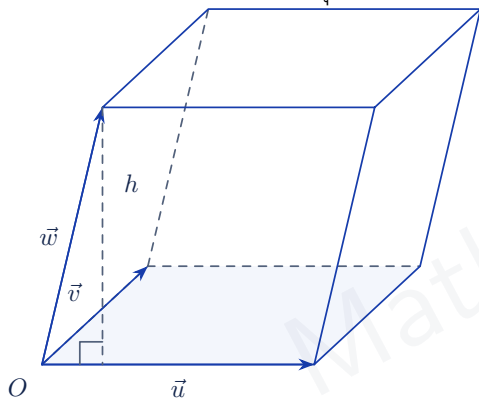
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$$

การเวียนลำดับคงค่า ส่วนการสลับเวกเตอร์สองตัวเปลี่ยนเครื่องหมาย และ

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ ร่วมระนาบ} \iff T = 0$$

5.2 ปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ให้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ขอบที่ออกจากจุดยอดเดียวกัน

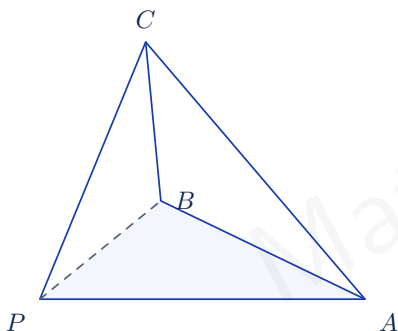


$$V_{\text{ด้านขนาน}} = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

ตัวอย่างย่อ ขอบ $\vec{u} = 2\vec{i}, \vec{v} = 3\vec{j}, \vec{w} = \vec{i} + 4\vec{k}$ ให้ปริมาตร $|2(3)(4)| = 24$ ลูกบาศก์หน่วย

5.3 ปริมาตรทรงสี่หน้า

ให้เวกเตอร์สามขอบที่ออกจากจุดยอดเดียวกัน P



$$V_{PABC} = \frac{1}{6} |\vec{PA} \cdot (\vec{PB} \times \vec{PC})|$$

ทรงสี่หน้ามีปริมาตรเป็นหนึ่งในหกของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ใช้เวกเตอร์ขอบเดียวกัน

5.4 ความสูงตั้งฉากจากเวกเตอร์ปกติ

ให้ฐานเกิดจากเวกเตอร์ไม่ขนาน $\vec{u}, \vec{v}$ และให้ $\vec{w}$ เชื่อมจากจุดบนระนาบฐานไปยังจุดยอดหรือฐานอีกด้าน ความสูงคือ

$$h = \frac{|\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$$V_{\text{ด้านขนาน}} = \text{Area}_{\text{ฐาน}} h, \quad V_{\text{ทรงสี่หน้า}} = \frac{1}{3} \text{Area}_{\text{ฐาน}} h$$

แต่ละสูตรใช้พื้นที่ฐานของรูปนั้น ความสูงเป็นระยะตั้งฉากกับระนาบฐาน และอาจต่างจากความยาวขอบเอียง

5.5 การเปลี่ยนขอบกับปริมาตร

เรียงเวกเตอร์ขอบเป็นหลัก $U = [\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}]$ และให้ขอบใหม่เป็นหลักของ UM โดย M เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด 3×3

$$V_{\text{ใหม่}} = |\det M| V_{\text{เดิม}}$$

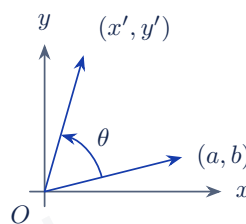
- บวกพหุคูณขอบอื่นเข้าขอบหนึ่ง ปริมาตรคงเดิม
- คูณขอบหนึ่งด้วย k ปริมาตรเป็น $|k|$ เท่า
- $\det M = 0$ ให้ขอบใหม่ร่วมระนาบและปริมาตรศูนย์

5.6 การหมุนเวกเตอร์ในระนาบ

หมุน $a\vec{i} + b\vec{j}$ ทวนเข็มนาฬิกาการรอบจุดกำเนิดด้วยมุม θ ได้ส่วนประกอบใหม่

$$x' = a \cos \theta - b \sin \theta$$

$$y' = a \sin \theta + b \cos \theta$$



มุม	90°	180°	270°
$(a, b) \mapsto$	$(-b, a)$	$(-a, -b)$	$(b, -a)$

หมุนตามเข็มนาฬิกาใช้มุมติดลบ ถ้าศูนย์หมุนเป็น C ให้หมุนเวกเตอร์จาก C แล้วบวกตำแหน่ง C กลับ

5.7 ความเร็วและแบริ่ง

ให้แกน x ชี้ตะวันออก แกน y ชี้เหนือ และแบริ่ง β วัดจากเหนือหมุนตามเข็มนาฬิกา ถ้าอัตราเร็วเป็น $v \geq 0$

$$\vec{v} = (v \sin \beta)\vec{i} + (v \cos \beta)\vec{j}$$

$$\vec{v}_{\text{พื้นดิน}} = \vec{v}_{\text{เทียบกับอากาศ}} + \vec{v}_{\text{ลม}}$$

ความเร็วรวมบวกแบบเวกเตอร์ โดยทิศลมหมายถึงทิศที่ลมพัดไป และใช้หน่วยเวลาเดียวกัน