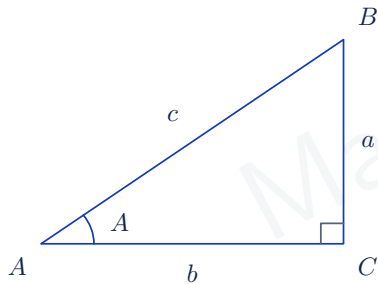


สรุปเนื้อหา เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1 มุม อัตราส่วน วงกลมหนึ่งหน่วย และค่ามุมสำคัญ

1.1 อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้สามเหลี่ยม ABC มี $C = 90^\circ$ และกำหนดความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C เป็น a, b, c ตามลำดับ



$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{a}{c} & \cos A &= \frac{b}{c} & \tan A &= \frac{a}{b} \\ \csc A &= \frac{c}{a} & \sec A &= \frac{c}{b} & \cot A &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

เมื่อเทียบกับมุม A : a คือด้านข้าม b คือด้านชิด และ c คือด้านตรงข้ามมุมฉาก

1.2 หน่วยมุมและมุมร่วมปลาย

หนึ่งรอบเท่ากับ $360^\circ = 2\pi$ เรเดียน ดังนั้น

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \pi \text{ เรเดียน} \\ \theta_{\text{rad}} &= \theta_{\text{deg}} \frac{\pi}{180} & \theta_{\text{deg}} &= \theta_{\text{rad}} \frac{180}{\pi} \\ 1^\circ &= 60' & 1' &= 60'' \end{aligned}$$

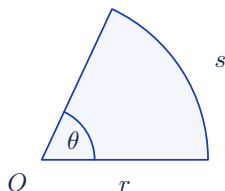
มุมร่วมปลายมีด้านเริ่มต้นและด้านสิ้นสุดเดียวกัน ค่ามุมต่างกันเป็นจำนวนเต็มรอบ

$$\theta + 2k\pi \quad \text{หรือ} \quad \theta + 360^\circ k \quad k \in \mathbb{Z}$$

มุมบวกวัดทวนเข็มนาฬิกา มุมลบวัดตามเข็มนาฬิกา

1.3 ความยาวส่วนโค้งและพื้นที่ส่วนของวงกลม

ให้ $r > 0$ เป็นรัศมี และ θ เป็นมุมที่ศูนย์กลาง หน่วยเรเดียน โดย $0 \leq \theta \leq 2\pi$



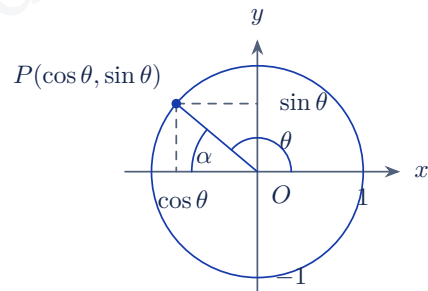
$$s = r\theta \quad \text{Area} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rs$$

โดย s คือความยาวส่วนโค้ง และพื้นที่หมายถึงส่วนที่ล้อมด้วยรัศมีสองเส้นกับส่วนโค้งนั้น ต้องเปลี่ยนองศาเป็นเรเดียนก่อนใช้สูตรนี้

1.4 วงกลมหนึ่งหน่วยและเครื่องหมาย

จุดปลายมุม θ บนวงกลมรัศมี 1 มีพิกัด

$$P(\cos \theta, \sin \theta) \quad x^2 + y^2 = 1$$



$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\cos \theta \neq 0)$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (\sin \theta \neq 0)$$

ควอดรนต์	I	II	III	IV
sin, csc	+	+	-	-
cos, sec	+	-	-	+
tan, cot	+	-	+	-

บนแกนพิกัดต้องตรวจค่าศูนย์และจุดที่ไม่นิยามแยกจากตารางเครื่องหมาย

1.5 ตารางค่าของมุมสำคัญ

องศา	0°	30°	45°	60°	90°
เรเดียน	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

สูตรส่วนกลับใช้เมื่อค่าที่เป็นตัวส่วนไม่เท่ากับศูนย์

1.6 มุมอ้างอิงและมุมประกอบกัน

เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$ และไม่อยู่บนแกน มุมอ้างอิง α คือมุมแหลมระหว่างด้านสิ้นสุดกับแกน x

ควอดรนต์	I	II	III	IV
α	θ	$\pi - \theta$	$\theta - \pi$	$2\pi - \theta$

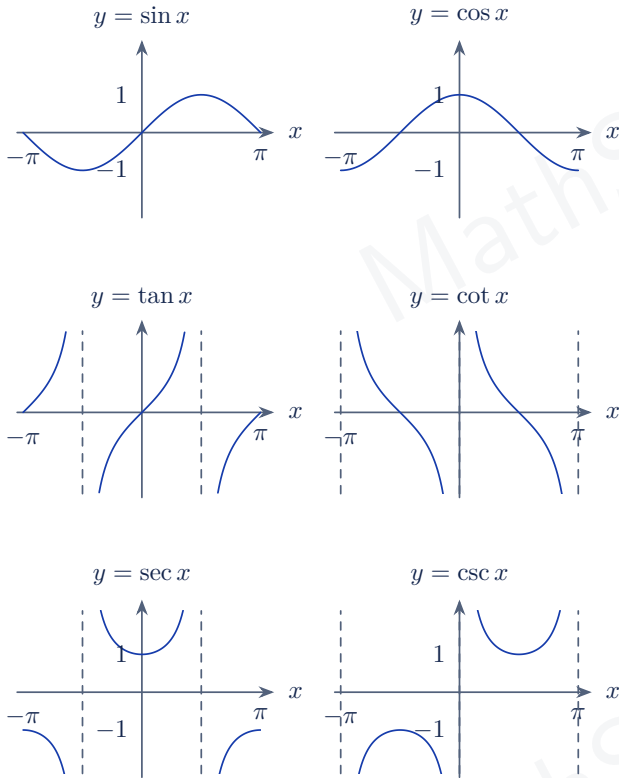
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

สรุปเนื้อหา เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2 กราฟ โดเมน เรนจ์ คาบ และเอกลักษณ์พื้นฐาน

2.1 กราฟมาตรฐานทั้งหกฟังก์ชัน



แกนนอนเป็นเรเดียน เส้นประแนวตั้งเป็นเส้นกำกับ ณ จุดที่ฟังก์ชันไม่นิยาม กราฟแสดงเฉพาะส่วนที่อยู่ในกรอบภาพ

2.2 เอกลักษณ์พีทาโกรัสและสมมาตร

สูตรต่อไปนี้ใช้เมื่อทุกพจน์นิยาม

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x & 1 + \cot^2 x &= \csc^2 x \\ \sin(-x) &= -\sin x & \cos(-x) &= \cos x \\ \tan(-x) &= -\tan x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x & \cos(x + \pi) &= -\cos x \\ \tan(x + \pi) &= \tan x \\ \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

การลดรูปไม่เปลี่ยนข้อห้ามเดิม โดยเฉพาะตัวส่วนและนิพจน์ใต้กรณฑ์

2.3 โดเมน เรนจ์ และคาบมูลฐาน

ในตาราง $k \in \mathbb{Z}$ และ T คือคาบบวกที่น้อยที่สุด

ฟังก์ชัน	โดเมนหรือค่าที่ตัดออก	T
$\sin x, \cos x$	$x \in \mathbb{R}$	2π
$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	π
$\cot x$	$x \neq k\pi$	π
$\sec x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	2π
$\csc x$	$x \neq k\pi$	2π
$R_{\sin} = R_{\cos} = [-1, 1]$		$R_{\tan} = R_{\cot} = \mathbb{R}$
$R_{\sec} = R_{\csc} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$		

2.4 การแปลงกราฟไซน์และโคไซน์

ให้ $a, b \neq 0$ และ $h, d \in \mathbb{R}$ สำหรับ

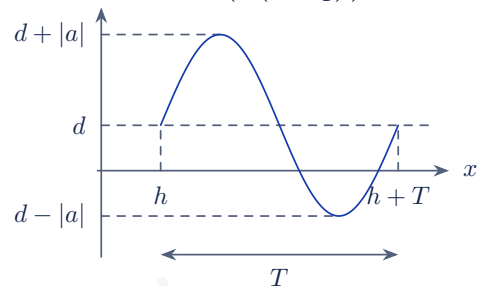
$$y = a \sin(b(x - h)) + d$$

หรือเปลี่ยน $\sin$ เป็น $\cos$ จะมี

$$\text{แอมพลิจูด} = |a| \quad T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$\text{เส้นกึ่งกลาง } y = d \quad R = [d - |a|, d + |a|]$$

$$y = 2 \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$$



$$d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \quad |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$$

- เลื่อนแนวนอน h หน่วย และแนวตั้ง d หน่วย
 - $a < 0$ สะท้อนค่าฟังก์ชันเทียบเส้นกึ่งกลาง
 - รูป $a \sin(bx + c) + d$ ต้องดึง b ออกก่อน จึงได้ $h = -\frac{c}{b}$
- กราฟ $a \tan(b(x - h)) + d$ และโคแทนเจนต์มีคาบ $\frac{\pi}{|b|}$ ส่วนซีแคนต์และโคซีแคนต์มีคาบ $\frac{2\pi}{|b|}$

2.5 ค่าสัมบูรณ์และคาบ

เมื่อ $b \neq 0$ ฟังก์ชัน $|\sin bx|$ มีคาบ $\frac{\pi}{|b|}$ แต่ $\sin |bx|$ ไม่มีคาบบวกบน $\mathbb{R}$

$$\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \quad \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

สรุปเนื้อหา เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3 สูตรผลบวก ผลต่าง มุมหลายเท่า ครึ่งมุม และการรวมคลื่น

3.1 ผลบวกและผลต่างของมุม

ให้ $A, B \in \mathbb{R}$ สูตรไซน์และโคไซน์ใช้ได้ทุกมุม

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

สูตรแทนเจนต์ต้องให้ $\tan A, \tan B$ นิยาม และตัวส่วนของสูตรที่ใช้ไม่เป็นศูนย์

3.2 มุมสองเท่าและการลดกำลัง

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

สูตรที่มี $\tan x$ ต้องให้ $\cos x \neq 0$ และสำหรับ $\tan 2x$ ต้องมี $\tan^2 x \neq 1$ เพิ่มขึ้น

3.3 มุมสามเท่า

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

สูตรสุดท้ายต้องให้ $\tan x$ นิยาม และ $1 - 3 \tan^2 x \neq 0$

3.4 เอกลักษณ์สำหรับการจัดรูป

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$$

$$(\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x) = 1$$

$$(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x) = 1$$

สองสูตรสุดท้ายใช้เมื่อทุกพจน์นิยาม เป็นผลต่างกำลังสองที่ได้จากเอกลักษณ์พีทาโกรัส

3.5 ครึ่งมุมและการเลือกเครื่องหมาย

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

เลือกเครื่องหมายตามควอดรนต์ของ $\frac{x}{2}$ แยกกันสำหรับไซน์และโคไซน์ มีใช้ตามควอดรนต์ของ x

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (1 + \cos x \neq 0)$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (\sin x \neq 0)$$

3.6 ผลคูณเป็นผลบวก

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

3.7 ผลบวกเป็นผลคูณ

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

3.8 การรวมไซน์กับโคไซน์

ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ $R = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$a \sin x + b \cos x = R \sin(x + \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{R} \quad \sin \alpha = \frac{b}{R}$$

$$-R \leq a \sin x + b \cos x \leq R$$

เลือกควอดรนต์ของ α จากเครื่องหมายทั้งสองค่า เมื่อจำกัดช่วง x ต้องตรวจว่าค่า R และ $-R$ เกิดในช่วงนั้นจริงหรือไม่

$$\prod_{j=0}^{n-1} \cos(2^j x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}$$

สูตรผลคูณนี้ใช้เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $\sin x \neq 0$

3.9 ผลบวกกำลังสองของนิพจน์คู่กัน

ให้ $p, q, A, B \in \mathbb{R}$ และกำหนด

$$X = p \sin A + q \sin B \quad Y = p \cos A + q \cos B$$

จะได้จากการกระจายกำลังสองและสูตรโคไซน์ผลต่าง

$$X^2 + Y^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos(A - B)$$

4 ฟังก์ชันผกผัน สมการ อสมการ และการนับคำตอบ

4.1 ฟังก์ชันผกผันและช่วงค่าหลัก

ค่าของฟังก์ชันผกผันเป็นมุมหนึ่งค่าในช่วงที่กำหนด ตารางนี้ใช้ข้อตกลงของบทเรียน MathStandard

ฟังก์ชัน	โดเมน	ช่วงค่าหลัก
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\text{arccot } x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\text{arcsec } x$	$ x \geq 1$	$[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$
$\text{arccsc } x$	$ x \geq 1$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$

สัญลักษณ์ $\sin^{-1} x$ ในความหมายฟังก์ชันผกผันคือ $\arcsin x$
ต่างจากส่วนกลับ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

4.2 ฟังก์ชันประกอบและการคิดค่ามุม

เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$ จะมี

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \cos(\arccos x) = x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

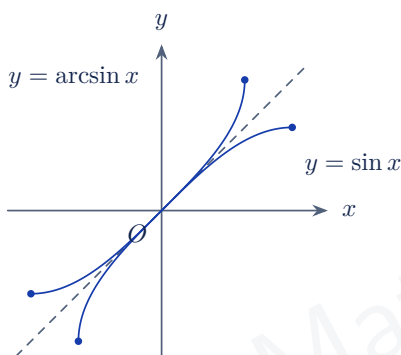
$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ จะมี

$$\tan(\arctan x) = x$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

การประกอบย้อนลำดับ เช่น $\arcsin(\sin x)$ จะได้ x เฉพาะเมื่อ x อยู่ในช่วงค่าหลักของ $\arcsin$



กราฟ $\arcsin$ สะท้อนกราฟ $\sin$ ที่จำกัดโดเมน $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ผ่านเส้น $y = x$

4.3 คำตอบทั่วไปของสมการพื้นฐาน

ให้ $\alpha \in \mathbb{R}$ และ $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = \sin \alpha \iff \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{หรือ } x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \iff \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{หรือ } x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi$$

สมการแทนเจนต์ใช้เมื่อ $\tan \alpha$ นิยาม

4.4 ขั้นตอนแก้สมการและตรวจคำตอบ

- ระบุช่วงมุมและจุดที่นิพจน์เดิมไม่นิยาม
- ถ้าตั้ง $u = ax + b$ ต้องเปลี่ยนช่วงของ u ด้วย โดยสลับปลายช่วงเมื่อ $a < 0$
- แยกตัวประกอบโดยไม่หารพจน์ที่อาจเป็นศูนย์
- ถ้าตั้ง $t = \sin x$ หรือ $t = \cos x$ ต้องมี $-1 \leq t \leq 1$ และถ้าตั้งเป็นกำลังสอง ต้องมี $0 \leq t \leq 1$
- หลังยกกำลังสองหรือกำจัดส่วน ให้ตรวจคำตอบในสมการเดิม แล้วนับเฉพาะค่าที่แตกต่างกัน

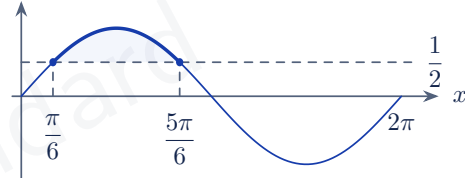
ตัวอย่างย่อ แก้ $\sin 2x = \frac{1}{2}$ เมื่อ $0 \leq x < 2\pi$ ให้ $u = 2x$ จึงมี $0 \leq u < 4\pi$ และได้

$$u = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$$

4.5 อสมการจากกราฟและช่วงมุม

หาเส้นขอบจากสมการเท่ากัน แล้วเลือกส่วนของกราฟที่สูงหรือต่ำกว่าเส้นระดับตามเครื่องหมาย



$$\sin x \geq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\implies x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

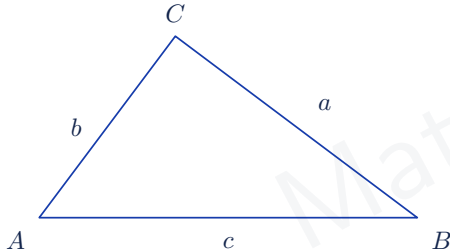
รวมปลายช่วงเมื่อใช้ $\leq, \geq$ และนิยามได้เท่านั้น จุดที่ตัวส่วนเป็นศูนย์ต้องตัดออกเสมอ

สรุปเนื้อหา เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5 การแก้สามเหลี่ยม พื้นที่ เส้นภายใน และการวัดความสูง

5.1 ด้าน มุม กฎไซน์ และกฎโคไซน์

ในสามเหลี่ยม ABC กำหนด $a = BC, b = CA, c = AB$ และ R เป็นรัศมีวงกลมล้อมรอบ



$$A + B + C = \pi \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ทุกด้านเป็นบวก และผลบวกสองด้านต้องมากกว่าด้านที่เหลือ กฎโคไซน์ใช้หาด้านจากสองด้านกับมุมระหว่างด้าน หรือหามุมจากสามด้าน

5.2 พื้นที่และรัศมีของวงกลม

ให้ a, b, c อยู่ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ $s = \frac{a+b+c}{2}$ และ r เป็นรัศมีวงกลมแนบใน ส่วน R เป็นรัศมีวงกลมล้อมรอบ

$$\text{Area} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{Area} = rs = \frac{abc}{4R}$$

$$r = \frac{\text{Area}}{s} \quad R = \frac{abc}{4 \text{Area}}$$

5.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมและเส้นมัธยฐาน

ในสามเหลี่ยม ABC ใช้ $a = BC, b = CA, c = AB$ และให้ D อยู่บน BC

- ถ้า AD แบ่งครึ่งมุม A

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \quad AD^2 = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right)$$

- ถ้า D เป็นจุดกึ่งกลาง BC เส้นมัธยฐานมี

$$AD^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

5.4 คอร์ดของวงกลม

วงกลมรัศมี $\rho > 0$ คอร์ดที่รองรับมุมศูนย์กลาง $\theta \in [0, 2\pi]$ มีความยาว

$$L = 2\rho \sin \frac{\theta}{2}$$

5.5 ข้อมูลสองด้านกับมุมตรงข้าม

เมื่อทราบ a, b, A โดย $a, b > 0$ และ $0 < A < \pi$ ใช้กฎไซน์หา

$$t = \frac{b \sin A}{a} = \sin B$$

- $t > 1$: ไม่มีสามเหลี่ยมตามข้อมูล
- $0 < t \leq 1$: พิจารณา $B = \arcsin t$ และ $B = \pi - \arcsin t$

แล้วเก็บเฉพาะ $A + B < \pi$

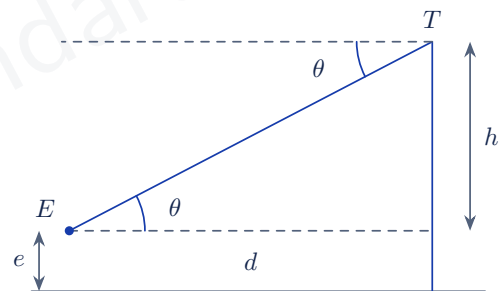
ถ้า $t = 1$ ทั้งสองรูปให้มุมเดียวกัน จึงนับครั้งเดียว ผลอาจเป็นศูนย์ หนึ่ง หรือสองรูปสามเหลี่ยม

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

เอกลักษณ์นี้ใช้กับมุมของสามเหลี่ยมเมื่อทุกพจน์นิยาม

5.6 มุมเงย มุมก้ม และระดับสายตา

มุมเงยและมุมก้มวัดจากแนวระดับของผู้สังเกต ให้ d เป็นระยะแนวราบ h เป็นความต่างระดับ และ e เป็นความสูงระดับสายตาจากพื้น

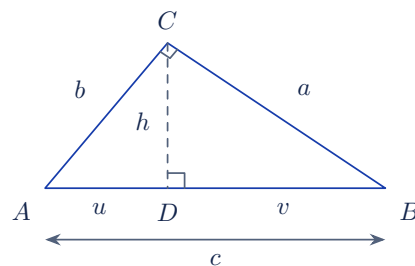


$$h = d \tan \theta \quad H = e + h$$

ในภาพ θ เป็นมุมเงย และมุมก้มจากยอดมายังผู้สังเกตมีขนาดเท่ากับ θ เพราะแนวระดับขนานกัน หลายจุดสังเกตต้องแยกกรณีอยู่ด้านเดียวกันหรือคนละด้าน และใช้ความต่างระดับเดียวกันในการตั้งสมการ

5.7 เส้นสูงในสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้ ABC ฉากที่ C โดย $a = BC, b = CA, c = AB$ ลาก $CD \perp AB$ และให้ $AD = u, DB = v, CD = h$



$$h^2 = uv \quad b^2 = cu \quad a^2 = cv$$

$$ab = ch \quad c = u + v$$