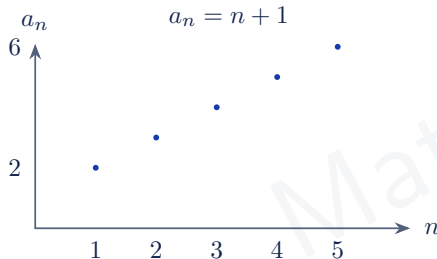


สรุปเนื้อหา เรื่อง ลำดับและอนุกรม

1 ลำดับ พจน์ทั่วไป และความสัมพัทธ์เวียนเกิด

1.1 ความหมายและการแสดงลำดับ

ลำดับคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นดัชนีจำนวนเต็มบวก หรือช่วงต้นของจำนวนเต็มบวก เขียนพจน์ที่ n เป็น $a_n = f(n)$



กราฟลำดับเป็นจุด ไม่เชื่อมจุดเป็นเส้นต่อเนื่อง เอกสารนี้พิจารณาพจน์จำนวนจริงและเริ่มต้นที่ 1 เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น การทราบพจน์ต้นเพียงบางพจน์ไม่จำเป็นต้องกำหนดกฎของลำดับได้แบบเดียว

1.2 ลำดับเลขคณิต

มีผลต่างของพจน์ติดกันคงที่ d โดย a_1 เป็นพจน์แรก

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

สำหรับดัชนีจำนวนเต็มบวก $q > p$

	$a_q - a_p = (q-p)d$		
ผลต่าง	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
ลักษณะ	เพิ่ม	คงตัว	ลด

ตัวอย่างย่อ 4, 7, 10, ... มี $d = 3$ และ $a_n = 3n + 1$

1.3 ลำดับเรขาคณิต

มีค่าคงที่ r ซึ่งทำให้ $a_{n+1} = ra_n$ ถ้า $a_n \neq 0$ จึงคำนวณ $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ได้

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (r \neq 0, n \geq 1)$$

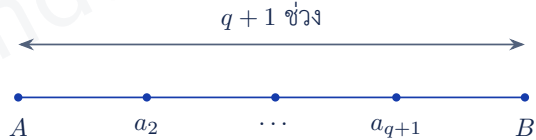
$$a_q = a_p r^{q-p} \quad (q > p)$$

ถ้า $r = 0$ ลำดับเป็น $a_1, 0, 0, \dots$ ให้ใช้พจน์แรกโดยตรง หาก $a_1 = 0$ ทุกพจน์เป็นศูนย์

ตัวอย่างย่อ 3, -6, 12, ... มี $r = -2$ และ $a_n = 3(-2)^{n-1}$
อัตราส่วนลบทำให้พจน์ที่ไม่เป็นศูนย์สลับเครื่องหมาย การเพิ่มหรือลดต้องตรวจ $a_{n+1} - a_n$

1.4 การแทรกพจน์ระหว่างสองจำนวน

แทรก q จำนวนระหว่าง A, B โดย q เป็นจำนวนเต็มบวก จะมีช่วงห่างทั้งหมด $q+1$ ช่วง



$$d = \frac{B-A}{q+1} \quad \text{แทรกแบบเลขคณิต}$$

ถ้า $A, B > 0$ และเลือกอัตราส่วนบวก

$$r = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{q+1}} \quad \text{แทรกแบบเรขาคณิต}$$

พจน์ที่แทรกแบบเลขคณิตคือ $A + kd$ และแบบเรขาคณิตคือ Ar^k เมื่อ $k = 1, \dots, q$

1.5 สามพจน์เรียงติดกัน

เลขคณิต เขียนเป็น $b-d, b, b+d$

$$\text{ผลบวก} = 3b, \quad \text{ผลคูณ} = b(b^2 - d^2)$$

เรขาคณิต ถ้า a, b, c เป็นสามพจน์ติดกัน จะมี

$$b^2 = ac, \quad abc = b^3$$

ถ้าทั้งสามไม่เป็นศูนย์ ใช้ $r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ ได้ แต่เมื่อมีศูนย์ต้องตรวจ $b = ra, c = rb$ โดยใช้ r เดียวกัน เช่น 0, 0, 1 ผ่านเงื่อนไข $b^2 = ac$ แต่ไม่เป็นสามพจน์เรขาคณิต

1.6 ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น

กำหนด a_1 และ $a_{n+1} = qa_n + b$ โดย q, b เป็นค่าคงที่

$$c = \frac{b}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

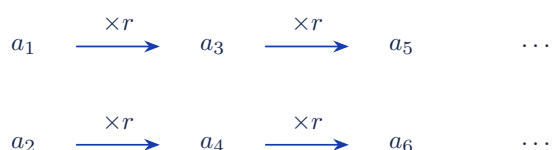
เลื่อนด้วยค่าคงตัว c จะได้ $a_{n+1} - c = q(a_n - c)$ จึงมี

$$a_n = c + (a_1 - c)q^{n-1} \quad (n \geq 2, q \neq 1)$$

ถ้า $q = 1$ จะได้ $a_n = a_1 + (n-1)b$ ถ้า $q = 0$ ลำดับเป็น $a_1, b, b, \dots$

1.7 การแยกดัชนีคี่และคู่

ถ้า $a_{n+2} = ra_n$ ให้แยกเป็นสองลำดับ โดยใช้ค่าตั้งต้น a_1, a_2 ต่างกัน



คำนวณแต่ละแถวจากค่าตั้งต้นของตน แล้วนำพจน์กลับมาตามดัชนีเดิม

2 ชิกมา ผลบวกจำกัด และการหักล้างพจน์

2.1 สัญลักษณ์ชิกมาและดัชนี

เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็ม $m \leq n$ และทุกพจน์นิยามได้

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

มีทั้งหมด $n - m + 1$ พจน์ ชื่อดัชนีเปลี่ยนได้หากขอบเขตและพจน์เปลี่ยนสอดคล้องกัน

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{j+m}$$

สำหรับค่าคงที่ α, β, c

$$\sum_{k=m}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=m}^n a_k + \beta \sum_{k=m}^n b_k$$

$$\sum_{k=m}^n c = (n - m + 1)c$$

ผลบวกซ้อนให้คำนวณด้านในก่อน และใช้ชื่อดัชนีต่างกันในแต่ละชั้น

2.2 ผลบวกย่อยกับพจน์ทั่วไป

กำหนด $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ และ $S_0 = 0$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$\sum_{k=p}^q a_k = S_q - S_{p-1} \quad (1 \leq p \leq q)$$

ตัวอย่างย่อ ถ้า $S_n = n^2 + 2n$ จะมี $a_n = 2n + 1$ สำหรับ $n \geq 1$

ถ้าสูตร S_n ใช้ได้เฉพาะ $n \geq 1$ ต้องตรวจ $a_1 = S_1$ แยกจากการแทน $n - 1$

2.3 อนุกรมเลขคณิตจำกัด

ให้ a_1 เป็นพจน์แรก a_n เป็นพจน์สุดท้าย d เป็นผลต่างร่วม และ n เป็นจำนวนพจน์

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$$

แต่ละหลักรวมได้ $a_1 + a_n$

จับคู่จากปลายทั้งสอง แต่ละคู่มีผลบวก $a_1 + a_n$ เท่ากัน

2.4 อนุกรมเรขาคณิตจำกัด

ให้ a_1 เป็นพจน์แรก r เป็นอัตราส่วนร่วม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} & r \neq 1 \\ na_1 & r = 1 \end{cases}$$

เมื่อ $r \neq 0, 1$ ใช้รูปที่มีพจน์สุดท้ายได้เป็น

$$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}$$

สูตรแรกครอบคลุม $r = 0$ ซึ่งผลบวกเท่ากับ a_1 และไม่ใช่ผลหารด้วย $1 - r$ เมื่อ $r = 1$

ตัวอย่างย่อ $3 + 6 + 12 + 24 = \frac{3(1 - 2^4)}{1 - 2} = 45$

2.5 ผลบวกกำลังของจำนวนเต็มบวก

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

ถ้าเริ่มที่ $m > 1$ ให้ใช้ผลบวกถึง n ลบผลบวกถึง $m - 1$

2.6 การหักล้างแบบเทเลสโคปิก

ถ้าเขียนพจน์เป็นผลต่าง $b_k - b_{k+1}$ จะได้

$$\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1})$$

เหลือพจน์ขอบ $b_1 - b_{n+1}$

การแยกเศษส่วนที่ใช้บ่อย โดย $a \neq b$ และตัวส่วนทุกตัวไม่เป็นศูนย์

$$\frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right)$$

ตัวอย่างย่อ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ จึงมี

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

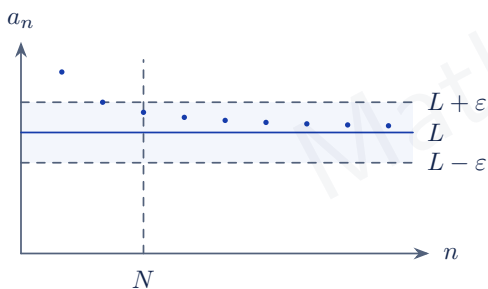
หากดัชนีต่างกันมากกว่าหนึ่ง ต้องคงพจน์ขอบที่ยังไม่หักล้างไว้ให้ครบ

สรุปเนื้อหา เรื่อง ลำดับและอนุกรม

3.1 ความหมายของการลู่เข้า

ลำดับ a_n ลู่เข้าสู่ $L \in \mathbb{R}$ เมื่อพจน์อยู่ใกล้ L ได้ตามต้องการ สำหรับดัชนีที่มากพอ เขียน $a_n \rightarrow L$ หรือ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$



ภาพแสดง $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ เมื่อเลือก $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ใช้ $N = 3$ ได้ ลำดับที่ไม่มีลิมิตเป็นจำนวนจริงเรียกว่าลู่ออก

3.2 สมบัติของลิมิตจำกัด

ถ้า $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$ และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\begin{aligned} a_n \pm b_n &\rightarrow A \pm B, & ca_n &\rightarrow cA \\ a_n b_n &\rightarrow AB, & \frac{a_n}{b_n} &\rightarrow \frac{A}{B} \quad (B \neq 0) \end{aligned}$$

ผลหารต้องนิยามได้สำหรับ n ที่มากพอ กรณี $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ต้องจัดรูปก่อน ไม่ใช่ค่าที่แทนลงในสูตรได้

3.3 ลิมิตมาตรฐานและอัตราการเติบโต

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^p} &\rightarrow 0 \quad (p > 0), & c^{\frac{1}{n}} &\rightarrow 1 \quad (c > 0) \\ n^{\frac{1}{n}} &\rightarrow 1, & \frac{n^p}{c^n} &\rightarrow 0 \quad (p > 0, c > 1) \\ \frac{c^n}{n!} &\rightarrow 0 & & (c > 0) \end{aligned}$$

สูตรเหล่านี้ใช้เมื่อ $n \rightarrow \infty$ และค่าคงที่ไม่ขึ้นกับ n

3.4 ผลหารพหุนามและผลต่างกรณช์

ผลหารพหุนามใน n พิจารณาดีกรีเศษเทียบกับส่วน

ดีกรีเศษเทียบกับส่วน	ผลลัพธ์
น้อยกว่า	ลิมิต 0
เท่ากัน	ผลหารสัมประสิทธิ์นำ
มากกว่า	$+\infty$ หรือ $-\infty$ ตามเครื่องหมายนำ

ผลต่างกรณช์ใช้สังยุค เมื่อกรณช์มีความหมายและตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

$$\sqrt{A_n} - \sqrt{B_n} = \frac{A_n - B_n}{\sqrt{A_n} + \sqrt{B_n}}$$

ตัวอย่างย่อ $\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$

3.5 ลิมิตของกำลังเรขาคณิต

ให้ $r \in \mathbb{R}$ คงที่ พิจารณาลำดับ r^n

เงื่อนไข ลักษณะเมื่อ $n \rightarrow \infty$

$ r < 1$	ลู่เข้าสู่ 0
$r = 1$	คงตัวเท่ากับ 1
$r > 1$	เข้าสู่ $+\infty$ จึงลู่ออก
$r = -1$	สลับ $-1, 1$ ไม่มีลิมิต
$r < -1$	สลับเครื่องหมาย ขนาดเพิ่มไม่จำกัด



ภาพแสดง $(-1)^n$ จุดไม่เข้าใกล้ค่าจำนวนจริงค่าเดียว ส่วนลำดับที่ทุกพจน์เป็นศูนย์ลู่เข้าสู่ศูนย์เสมอ

3.6 ลำดับย่อยคู่และคี่

$$a_{2n} \rightarrow L \text{ และ } a_{2n-1} \rightarrow L \Rightarrow a_n \rightarrow L$$

หากลำดับย่อยคู่และคี่มีลิมิตต่างกัน หรือมีลำดับย่อยที่ลู่ออก ลำดับเดิมย่อมลู่ออก

ตัวอย่างย่อ $a_n = 2 + (-1)^n$ มี $a_{2n} = 3$ และ $a_{2n-1} = 1$ จึงไม่มีลิมิต

3.7 ลำดับทางเดียวและขอบเขต

สมบัติของลำดับ ขอบเขตที่เพียงพอต่อการลู่เข้า

$a_{n+1} \geq a_n$ ทุก n มีขอบเขตบน

$a_{n+1} \leq a_n$ ทุก n มีขอบเขตล่าง

ลำดับเพิ่มที่มีขอบเขตบน หรือลำดับลดที่มีขอบเขตล่าง ลู่เข้าสู่จำนวนจริงเสมอ การมีขอบเขตเพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอ เช่น $(-1)^n$

3.8 ลำดับเวียนเกิดและสมการจุดตรึง

ถ้าพิสูจน์แล้วว่า $a_n \rightarrow L$ และ $a_{n+1} = f(a_n)$ โดย f ต่อเนื่องที่ L จึงสรุปได้ว่า

$$L = f(L)$$

สมการนี้ให้ค่าที่อาจเป็นลิมิต ต้องตรวจการลู่เข้าและคัดกรากตามขอบเขตของลำดับก่อน

ตัวอย่างย่อ $a_{n+1} = 2a_n - 1$, $a_1 = 2$ ให้

$a_n = 1 + 2^{n-1} \rightarrow +\infty$ แม้สมการ $L = 2L - 1$ จะให้ $L = 1$

4 อนุกรมอนันต์และเงื่อนไขของผลบวก

4.1 นิยามจากผลบวกย่อย

ให้ $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ อนุกรมอนันต์ลู่เข้าเมื่อผลบวกย่อยลู่เข้าสู่จำนวนจริง S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \iff \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S \in \mathbb{R}$$

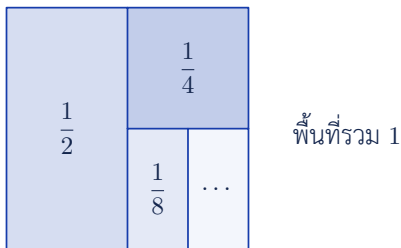


ลำดับ a_n พิจารณาทีละพจน์ ส่วนอนุกรมพิจารณาการสะสมผ่าน S_N จึงต้องแยกสองลิมิตนี้

4.2 อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

ให้ a_1 เป็นพจน์แรก r เป็นอัตราส่วนร่วม ถ้า $|r| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

ถ้า $a_1 \neq 0$ และ $|r| \geq 1$ อนุกรมลู่ออก หากทุกพจน์เป็นศูนย์ ผลบวกเท่ากับศูนย์

4.3 พจน์ทั่วไปเป็นศูนย์ยังไม่เพียงพอ

$$\sum a_n \text{ ลู่เข้า } \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

บทกลับไม่จริง เช่น $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ แต่อนุกรมฮาร์มอนิก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก เพราะจัดกลุ่มได้เป็น

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

ถ้า a_n ไม่เข้าสู่ศูนย์ สรุปว่าอนุกรมลู่ออกได้ทันที

4.4 เทลีสโคปิกอนันต์

เริ่มจากผลบวกจำกัด แล้วจึงหาลิมิต

$$\sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{N+1}$$

ถ้า $b_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - L$$

ตัวอย่างย่อ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$
ไม่หักล้างอนันต์พจน์โดยละพจน์ขอบ เพราะพจน์ขอบอาจไม่เข้าสู่ศูนย์

4.5 อนุกรมจากกำลังและการแยกตัวชี้

ผลบวกจำกัดเมื่อ $N \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม และ $r \neq 1$

$$\sum_{k=1}^N kr^k = \frac{r - (N+1)r^{N+1} + Nr^{N+2}}{(1-r)^2}$$

เมื่อ $r = 1$ ผลบวกเป็น $\frac{N(N+1)}{2}$ ส่วนกรณี $|r| < 1$ หาลิมิตเมื่อ $N \rightarrow \infty$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} r^{2j} = \frac{r^2}{1-r^2}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} r^{2j-1} = \frac{r}{1-r^2}$$

ทั้งสองอนุกรมหลังมีอัตราส่วนร่วม r^2 และเริ่มที่ r^2 กับ r ตามลำดับ ถ้าอนุกรมเรขาคณิตมีผลบวก $S > 0$ จะมี

$$a_1 = S(1-r), \quad a_2 = Sr(1-r) \leq \frac{S}{4}$$

ความเท่ากันเกิดเมื่อ $r = \frac{1}{2}$ โดยยังคงเงื่อนไข $|r| < 1$

4.6 ผลบวกที่ขึ้นกับตัวแปร

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [r(x)]^n = \frac{1}{1-r(x)}$$

โดเมนต้องผ่าน $|r(x)| < 1$ และนิพจน์ $r(x)$ ต้องนิยามได้ ห้ามขยายโดเมนเดิมด้วยการตัดตัวประกอบ

ตัวอย่างย่อ $\sum_{n=0}^{\infty} (2x-1)^n = \frac{1}{2-2x}$ ใช้ได้เฉพาะ

$$0 < x < 1$$

พจน์ดัชนี $n=0$ ของผลบวกนี้กำหนดให้เป็น 1 ซึ่งครอบคลุมกรณี $r(x) = 0$ ด้วย

สรุปเนื้อหา เรื่อง ลำดับและอนุกรม

5 อนุกรมซ้อน ทศนิยมซ้ำ และแบบจำลองการเงิน

5.1 อนุกรมซ้อนแบบเรขาคณิต

ให้ $x, t \in \mathbb{R}$ โดย $|t| < 1$ และ $|xt| < 1$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + x + \dots + x^n) t^n = \frac{1}{(1-t)(1-xt)}$$

$$1 + t + xt + t^2 + xt^2 + x^2 t^2 + \dots$$

$$= (1 + t + t^2 + \dots)$$

$$+ xt(1 + t + t^2 + \dots) + \dots$$

เงื่อนไขทั้งสองทำให้ผลบวกลู่ออกอย่างสมบูรณ์ จึงจัดกลุ่มตามกำลังของ x ได้ กรณี $x = 1$ ใช้สูตรเดียวกันโดยไม่ต้องหารด้วย $1 - x$

5.2 ทศนิยมซ้ำเป็นเศษส่วน

พิจารณาเฉพาะส่วนทศนิยม ให้มีส่วนไม่ซ้ำ p หลัก และช่วงซ้ำ q หลัก โดย $p \geq 0, q \geq 1$

$$\text{ส่วนทศนิยม} = \frac{B - A}{10^p(10^q - 1)}$$

A คือจำนวนเต็มที่ได้จากช่วงไม่ซ้ำ ถ้าไม่มีให้ $A = 0$ ส่วน B คือช่วงไม่ซ้ำต่อด้วยช่วงซ้ำหนึ่งชุด หากมีส่วนจำนวนเต็มให้บวกกลับภายหลัง

ตัวอย่างย่อ $0.12\overline{3} = \frac{123-1}{10(100-1)} = \frac{61}{495}$

จำนวนหลักของช่วงซ้ำต้องนับรวมเลขศูนย์นำหน้าของช่วงนั้นด้วย

5.3 ฟังก์ชันประกอบและผลคูณกำลัง

ให้ $f(x) = x^{\frac{1}{k}}$ เมื่อ $x > 0, k > 1$ จะได้

$$f^{\circ n}(x) = x^{k^{-n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

สัญลักษณ์ $f^{\circ n}$ หมายถึงประกอบ f กับตนเอง n ครั้ง ส่วนผลคูณที่มีฐานเดียวกัน $a > 0$ ใช้

$$a^{b_1} a^{b_2} \dots a^{b_n} = a^{b_1 + \dots + b_n}$$

ถ้าหาผลคูณอนันต์ ต้องพิจารณาลิมิตของผลคูณจำกัดก่อน

5.4 พจน์ร่วมและการแยกกลุ่ม

เลขคณิตที่มีผลต่างบวกเป็นจำนวนเต็ม d, e หากมีพจน์ร่วม จะมีช่วงห่างของพจน์ร่วมเป็น

$$\text{lcm}(d, e)$$

ต้องหาพจน์ร่วมแรกแยกต่างหาก ส่วนลำดับที่ค่าซ้ำตามคาบ เช่น ค่าตรีโกณมิติ ให้แยกดัชนีเป็นกลุ่มตามคาบก่อนหาผลบวก

5.5 ดอกเบี้ยทบต้น

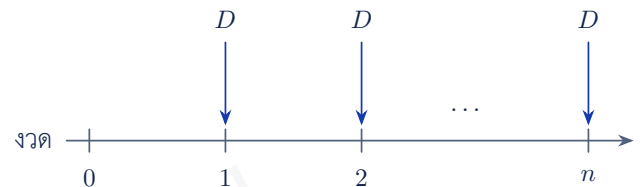
ให้ P เป็นเงินต้น $i \geq 0$ เป็นอัตราดอกเบี้ยต่องวดในรูปทศนิยม และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่นับงวด มูลค่าปลายงวดที่ n คือ

$$V_n = P(1+i)^n$$

อัตราดอกเบี้ยและความถี่ของงวดต้องตรงกัน แบบจำลองนี้สมมติอัตราคงที่ ไม่มีค่าธรรมเนียมและภาษี

5.6 เงินฝากจำนวนเท่ากันทุกงวด

ให้ฝากงวดละ D เป็นเวลา n งวด และ i เป็นอัตราดอกเบี้ยต่องวด ประเมินยอดทันทีเมื่อสิ้นงวดที่ n



$$F_n = D \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (i > 0)$$

สำหรับเงินฝากปลายงวด แต่ละยอดรับดอกเบี้ยต่างกัน ตั้งแต่ $n-1$ งวดถึง 0 งวด

$$F_{\text{ต้นงวด}} = (1+i)F_n$$

กรณีฝากต้นงวดใช้ช่วงเวลาฝาก $0, 1, \dots, n-1$ หาก $i = 0$ ทั้งสองกรณีมียอด nD

5.7 เงินกู้และยอดหนี้หลังชำระ

ให้ L เป็นเงินกู้เริ่มต้น D เป็นยอดชำระปลายงวดเท่ากัน และ $i > 0$ เป็นอัตราดอกเบี้ยต่องวด ยอดหนี้หลังจ่ายครั้งที่ n คือ

$$B_n = L(1+i)^n - D \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ถ้าปิดหนี้พอดีใน $n \geq 1$ งวด ใช้ $B_n = 0$ โดย n เป็นจำนวนเต็ม

$$L = D \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}, \quad D = \frac{Li}{1 - (1+i)^{-n}}$$

หาก $i = 0$ จะมี $B_n = L - nD$ และ $D = \frac{L}{n}$ สูตรนี้ใช้จนถึงงวดปิดหนี้ โดยอาจต้องปรับยอดชำระงวดสุดท้าย

5.8 เลือกสูตรและตรวจดัชนี

- แยก a_n ซึ่งเป็นพจน์ที่ n ออกจาก S_n ซึ่งรวม n พจน์
- ตรวจพจน์แรก จำนวนพจน์ และพจน์ขอบหลังเลื่อนดัชนี
- แยกผลบวกจำกัดออกจากอนุกรมอนันต์ และตรวจเงื่อนไขการลู่เข้าก่อนใช้ผลบวกอนันต์