

สรุปเนื้อหา เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1 ความสัมพันธ์ ผลคูณคาร์ทีเซียน และโดเมนและเรนจ์

1.1 คู่อันดับและผลคูณคาร์ทีเซียน

คู่อันดับให้ความสำคัญกับตำแหน่งของสมาชิก

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ และ } b = d$$

ให้ A, B เป็นเซต ผลคูณคาร์ทีเซียนนิยามโดย

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- โดยทั่วไป $A \times B \neq B \times A$
- $A \times B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$

ตัวอย่างย่อ ถ้า $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{3, 5\}$ จะได้
 $A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$

1.2 สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ A, B, C, D เป็นเซต

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

ถ้า $A \neq \emptyset$ จะมี

$$A \times B = A \times C \implies B = C$$

เงื่อนไข $A \neq \emptyset$ จำเป็น เพราะเซตว่างคูณกับเซตใดก็ได้เซตว่าง

1.3 ความสัมพันธ์และจำนวนความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์ r จาก A ไป B คือสับเซตของ $A \times B$ จึงอาจมี
 หนึ่งตัวหน้าให้หลายตัวหลังได้

$$r \subseteq A \times B$$

ถ้า A, B จำกัด ให้ $n(X)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต X และ
 กำหนด $n(A) = m, n(B) = n$

$$n(A \times B) = mn \quad \text{จำนวนความสัมพันธ์} = 2^{mn}$$

จำนวนคู่ในความสัมพันธ์ $n(r)$ ต่างจากจำนวนความสัมพันธ์
 ทั้งหมดที่เลือกสร้างได้

1.4 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

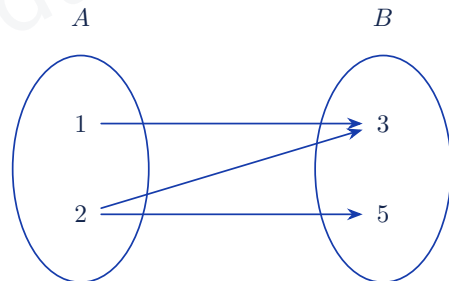
โดเมนคือเซตตัวหน้าที่ปรากฏจริง ส่วนเรนจ์คือเซตตัวหลังที่
 ปรากฏจริง โดยไม่นับสมาชิกซ้ำ

$$D_r = \{x \mid \text{มี } y \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in r\}$$

$$R_r = \{y \mid \text{มี } x \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in r\}$$

1.5 แผนภาพและความสัมพันธ์ผกผัน

ตัวอย่างย่อ $r = \{(1, 3), (2, 3), (2, 5)\}$ มี $D_r = \{1, 2\}$ และ
 $R_r = \{3, 5\}$



ความสัมพันธ์ผกผันเกิดจากการสลับสมาชิกของทุกคู่อันดับ

$$r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$$

$$D_{r^{-1}} = R_r \quad R_{r^{-1}} = D_r$$

1.6 ข้อจำกัดของนิพจน์ในจำนวนจริง

ให้ $P(x), Q(x)$ เป็นนิพจน์ที่มีนิยาม เงื่อนไขเพิ่มเติมของรูปต่อไป
 นี้คือ

นิพจน์	เงื่อนไข
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$\sqrt{P(x)}$	$P(x) \geq 0$
$\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$	$P(x) > 0$

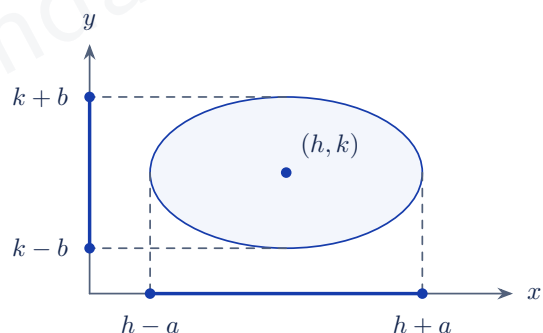
ใช้เงื่อนไขทุกข้อพร้อมกัน การตัดตัวประกอบไม่คืนค่าที่ถูกห้าม
 ในนิพจน์เดิม

1.7 อ่านโดเมนและเรนจ์จากกราฟ

ฉายกราฟลงแกน x เพื่อหาโดเมน และลงแกน y เพื่อหาเรนจ์
 โดยตรวจว่ารวมปลายช่วงหรือไม่ สำหรับวงรีที่มีศูนย์กลาง

(h, k) และ $a, b > 0$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



$$D = [h - a, h + a] \quad R = [k - b, k + b]$$

กราฟของความสัมพันธ์มีโดเมนและเรนจ์ได้ แม้ไม่เป็นฟังก์ชัน

สรุปเนื้อหา เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

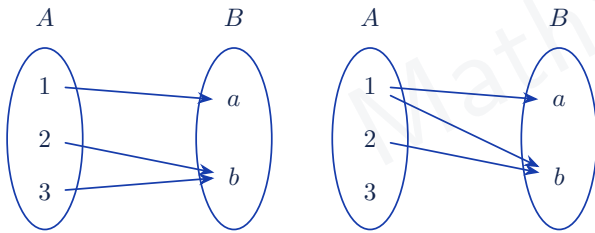
2 ความเป็นฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชัน และการนับ

2.1 ฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B

ฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ จับคู่สมาชิกทุกตัวของ A กับสมาชิกของ B เพียงค่าเดียว

$$D_f = A \quad R_f = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$$

B คือเซตปลายทาง จึงอาจมีสมาชิกที่ไม่เป็นผลลัพธ์ของ f ได้



เป็นฟังก์ชัน

ไม่เป็นฟังก์ชัน

- สมาชิกทุกตัวของ A ต้องมีผลลัพธ์
- หนึ่งอินพุตมีหลายผลลัพธ์ไม่ได้ แต่ต่างอินพุตให้ผลลัพธ์เดียวกันได้

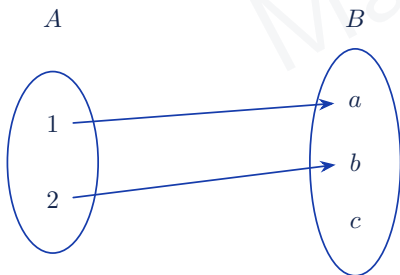
2.2 หนึ่งต่อหนึ่ง ทัวถึง และหนึ่งต่อหนึ่งทัวถึง

ให้ $f: A \rightarrow B$ สำหรับทุก $u, v \in A$

$$f \text{ หนึ่งต่อหนึ่ง} \iff [f(u) = f(v) \implies u = v]$$

$$f \text{ ทัวถึง } B \iff R_f = B$$

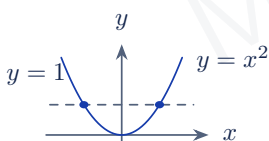
หนึ่งต่อหนึ่งทัวถึงต้องผ่านทั้งสองเงื่อนไข



ภาพเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง แต่ไม่ทัวถึงเซตปลายทาง เพราะมีสมาชิกของ B ที่ไม่มีลูกศรชี้ถึง

2.3 ทดสอบจากกราฟ

- เส้นแนวตั้งตัดกราฟได้ไม่เกินหนึ่งจุดทุกเส้น: กราฟเป็นฟังก์ชันบนโดเมนที่อ่านได้
- เมื่อเป็นฟังก์ชันแล้ว เส้นแนวนอนตัดได้ไม่เกินหนึ่งจุดทุกเส้น: เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง



$y = x^2$ เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งบน $\mathbb{R}$ หากจำกัดโดเมนเป็น $[0, \infty)$ จะเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

2.4 นับฟังก์ชันบนเซตจำกัดไม่ว่า

ให้ $n(A) = m, n(B) = n$ โดย $m, n \geq 1$ และเป็นจำนวนเต็ม

ประเภทของฟังก์ชัน	จำนวน
ฟังก์ชันทั้งหมดจาก A ไป B	n^m
หนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ $m \leq n$	$\frac{n!}{(n-m)!}$
หนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง เมื่อ $m = n$	$n!$
เพิ่มเคร่งครัดบนเซตจำนวนจริง เมื่อ $m \leq n$	$\binom{n}{m}$
	$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad 0 \leq m \leq n$

โดย $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ และ $0! = 1$

- ไม่มีหนึ่งต่อหนึ่งเมื่อ $m > n$
- ไม่มีทั่วถึงเมื่อ $m < n$

การนับเพิ่มเคร่งครัดเลือกผลลัพธ์ m ค่าจาก B แล้วจับคู่ตามลำดับจากน้อยไปมากเพียงวิธีเดียว

2.5 นับฟังก์ชันทัวถึงด้วยบวกลบรวม

ให้ A, B เป็นเซตจำกัดไม่ว่า โดย $n(A) = m, n(B) = n$

จำนวนฟังก์ชันทัวถึงคือ

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$$

เริ่มจากทั้งหมด n^m ลบกรณีที่ไม่ใช่ผลลัพธ์หนึ่งค่า แล้วบวกคืนกรณีที่มิใช่สองค่า สลับเครื่องหมายต่อไป

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \dots$$

ตัวอย่างย่อ จากเซต 3 สมาชิกไปเซต 2 สมาชิก มีฟังก์ชันทัวถึง $2^3 - 2 \cdot 1^3 = 6$ ฟังก์ชัน

2.6 ความสัมพันธ์ที่ใช้โดเมนครบ

ให้ $n(A) = m, n(B) = n$ โดย A, B จำกัดไม่ว่า ถ้าต้องการเพียง $D_r = A$ แต่ยอมให้แต่ละตัวหน้ามีหลายผลลัพธ์ จำนวนความสัมพันธ์คือ

$$(2^n - 1)^m$$

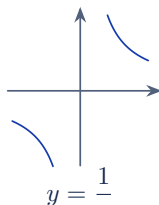
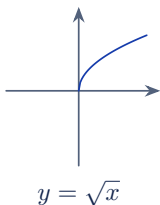
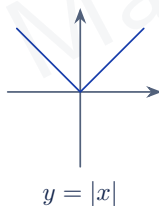
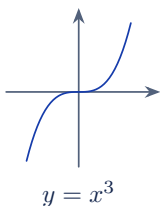
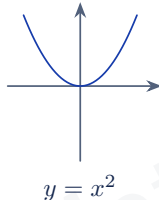
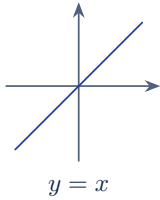
แต่ละสมาชิกของ A เลือกสับเซตไม่ว่างของ B ได้ $2^n - 1$ แบบ จึงต่างจากการนับฟังก์ชัน n^m

สรุปเนื้อหา เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

3 กราฟมาตรฐาน การแปลงกราฟ และสมบัติของฟังก์ชัน

3.1 กราฟมาตรฐานและโดเมนและเรนจ์

กราฟต่อไปนี้ใช้โดเมนจำนวนจริงมากที่สุดที่สูตรนิยามได้



สูตร	โดเมน	เรนจ์
x, x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^2, x $	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3.2 เรนจ์ของสูตรที่พบได้บ่อย

ให้ $a \neq 0$ และ $h, k \in \mathbb{R}$ สำหรับ $a(x - h)^2 + k$ หรือ $a|x - h| + k$ บน $\mathbb{R}$

$$a > 0 : [k, \infty) \quad a < 0 : (-\infty, k]$$

สำหรับ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0$ และ $ad - bc \neq 0$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \quad R = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

ถ้า $ad - bc = 0$ กราฟอาจเป็นค่าคงตัวที่มีจุดห้ามเติม ต้องแยกพิจารณา ไม่ใช่สูตรเรขาคณิต

3.3 การเลื่อน สะท้อน และเปลี่ยนขนาด

ให้ $a, b, h, k \in \mathbb{R}$ โดย $a, b \neq 0$ กำหนด

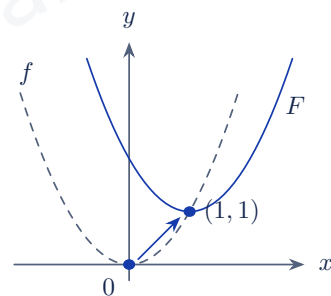
$$F(x) = a f(b(x - h)) + k$$

จุดเดิม $(u, f(u))$ บนกราฟเปลี่ยนเป็น

$$\left(h + \frac{u}{b}, k + af(u) \right)$$

รูปใหม่	ผลต่อกราฟ
$f(x - h)$	เลื่อนตามแนวนอน h หน่วย
$f(x) + k$	เลื่อนตามแนวตั้ง k หน่วย
$-f(x)$	สะท้อนผ่านแกน x
$f(-x)$	สะท้อนผ่านแกน y
$af(x)$	คูณพิสัยแนวตั้งด้วย a
$f(bx)$	คูณพิสัยแนวนอนด้วย $\frac{1}{b}$

ตัวอย่างย่อ $f(x) = x^2, F(x) = (x - 1)^2 + 1$ มีจุดยอดเลื่อนจาก $(0, 0)$ เป็น $(1, 1)$



3.4 เพิ่มและลดบนช่วงที่กำหนด

สำหรับ $u < v$ ในช่วงเดียวกัน

เพิ่มเคร่งครัด: $f(u) < f(v)$

ลดเคร่งครัด: $f(u) > f(v)$

ฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดเคร่งครัดบนโดเมนทั้งชุดเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง การเพิ่มในแต่ละช่วงย่อยแยกกันยังไม่เพียงพอ

3.5 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

โดเมนต้องสมมาตรเกี่ยวกับศูนย์ คือมี $-x$ อยู่ด้วยทุกครั้งที่มี x แล้วตรวจ

$$f(-x) = f(x) : \text{ฟังก์ชันคู่}$$

$$f(-x) = -f(x) : \text{ฟังก์ชันคี่}$$

กราฟคู่สมมาตรผ่านแกน y กราฟคี่สมมาตรผ่านจุดกำเนิด เช่น x^2 เป็นคู่ และ x^3 เป็นคี่ ฟังก์ชันศูนย์เป็นทั้งคู่และคี่เมื่อโดเมนสมมาตร ส่วนฟังก์ชันทั่วไปอาจไม่เป็นทั้งสองประเภท

สรุปเนื้อหา เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

4 พืชคณิตของฟังก์ชันและฟังก์ชันประกอบ

4.1 ความเท่ากันและการดำเนินการ

ฟังก์ชัน f, g ในฐานความสัมพันธ์เท่ากันเมื่อมีโดเมนเดียวกัน และให้ค่าตรงกันทุกอินพุตในโดเมนนั้น

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$$

สำหรับผลหาร ต้องตัดศูนย์ของฟังก์ชันตัวส่วนเพิ่ม

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$$

4.2 คงข้อจำกัดเดิมหลังจัดรูป

นิพจน์ที่ลดรูปเท่ากันอาจมีโดเมนต่างกัน จึงไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเดียวกัน

ตัวอย่างย่อ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ มีโดเมน $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ แต่

$g(x) = x + 1$ บน $\mathbb{R}$ มีโดเมนต่างกัน จึงมี $f \neq g$

สำหรับนิพจน์จริง u, v รูป $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ ต้องมี $u \geq 0, v > 0$ แต่ $\sqrt{\frac{u}{v}}$ ต้องมี $v \neq 0$ และ $\frac{u}{v} \geq 0$ จึงอาจใช้แทนกันไม่ได้บนทุกโดเมน

4.3 เปลี่ยนอินพุตและสูตรฟังก์ชัน

ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$ ถ้า $f(ax + b) = H(x)$ เมื่อ $x \in S$ ตั้ง $t = ax + b$ แล้วได้

$$f(t) = H\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

สูตรนี้กำหนดค่า f เฉพาะ $t \in \{ax + b \mid x \in S\}$ เท่านั้น ไม่รับรองค่าอินพุตนอกเซตนี้ ถ้า $f + g = H$ และ $f - g = K$ บนโดเมนร่วมเดียวกัน

$$f = \frac{H + K}{2} \quad g = \frac{H - K}{2}$$

4.4 ลำดับการประกอบและโดเมน

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ทำ f ด้านในก่อน แล้วนำผลลัพธ์ไปเป็นอินพุตของ g



$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

- ตรวจสอบว่า x ใช้กับ f ได้
- ตรวจสอบว่าค่า $f(x)$ ใช้กับ g ได้ด้วย

หากต้องการประกอบบนโดเมน D_f ทั้งชุด ต้องมี $R_f \subseteq D_g$

4.5 สูตรเหมือนกันไม่ทำให้โดเมนหายไป

ตัวอย่างย่อ ให้ $f(x) = x^2$ บน $\mathbb{R}$ และ $g(x) = \sqrt{x-1}$ บน $[1, \infty)$ จะได้

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$D_{g \circ f} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$(f \circ g)(x) = x - 1 \quad D_{f \circ g} = [1, \infty)$$

โดยทั่วไป $g \circ f \neq f \circ g$ และ fg หมายถึงผลคูณ มิใช่ผลประกอบ

4.6 แบ่งช่วง ประกอบหลายชั้น และเอกลักษณ์

ฟังก์ชันแบ่งช่วงต้องเลือกสูตรตามอินพุตที่เข้าสู่ฟังก์ชันนั้นจริง แล้วเลือกใหม่ในแต่ละชั้นของการประกอบ

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

ความเท่ากันนี้ใช้บนโดเมนที่ทุกชั้นนิยามได้ ให้ $I_A(x) = x$ บนเซต A จะมี

$$f \circ I_{D_f} = f \quad I_{R_f} \circ f = f$$

f^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก หมายถึงประกอบ f ซ้ำ n ครั้ง ต่างจากกำลัง $[f(x)]^n$

ตัวอย่างย่อ ถ้า $f(x) = ax + b$ บน $\mathbb{R}$ จะได้

$$(f \circ f)(x) = a^2x + (a + 1)b$$

สรุปเนื้อหา เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

5 ฟังก์ชันผกผัน การจำกัดโดเมน และภาพย้อนกลับ

5.1 เงื่อนไขการมีฟังก์ชันผกผัน

ให้ $f : A \rightarrow B$ ถ้า f หนึ่งต่อหนึ่ง จะมีฟังก์ชันผกผัน $f^{-1} : R_f \rightarrow A$ โดย

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

ถ้า f ทั่วถึง B ด้วย จะได้ $f^{-1} : B \rightarrow A$

$$D_{f^{-1}} = R_f \quad R_{f^{-1}} = D_f$$

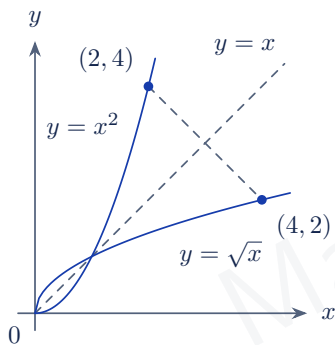
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in D_f)$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in R_f)$$

f^{-1} ไม่ใช่ $\frac{1}{f}$ การหาสูตรผกผันใช้การสลับ x, y แล้วแก้หาผลลัพธ์ พร้อมระบุโดเมนใหม่

5.2 กราฟผกผันสะท้อนผ่าน $y = x$

จุด (a, b) บนกราฟ f เปลี่ยนเป็น (b, a) บนกราฟ f^{-1} ใช้มาตราส่วนทั้งสองแกนเท่ากัน



ภาพใช้ $f(x) = x^2$ เมื่อ $x \geq 0$ และ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $x \geq 0$

5.3 สูตรผกผันที่ใช้บ่อย

สำหรับ $f(x) = ax + b$ บน $\mathbb{R}$ และ $a \neq 0$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

สำหรับ $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ บนโดเมนธรรมชาติ เมื่อ $ad - bc \neq 0$

$$f^{-1}(x) = \frac{b - dx}{cx - a}$$

ค่าคงตัวทั้งหมดเป็นจำนวนจริง และต้องตัดศูนย์ของตัวส่วนในแต่ละสูตร

5.4 กำลังสองต้องเลือกโดเมนก่อนผกผัน

ให้ $f(x) = a(x - h)^2 + k$ โดย $a > 0$ และ $h, k \in \mathbb{R}$ ถ้าไม่จำกัดโดเมนจะไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

โดเมนของ f	สูตร $f^{-1}(x)$
$[h, \infty)$	$h + \sqrt{\frac{x - k}{a}}$
$(-\infty, h]$	$h - \sqrt{\frac{x - k}{a}}$

ทั้งสองสูตรมีโดเมน $[k, \infty)$ แต่เรนจ์ต่างกันตามโดเมนเดิมของ f ผกผันของฟังก์ชันแบ่งช่วงต้องเลือกเงื่อนไขจากเรนจ์ของแต่ละช่วงเดิม มิใช่คัดลอกเงื่อนไขอินพุตเดิม

5.5 ผกผันของฟังก์ชันประกอบ

เมื่อฟังก์ชันผกผันและการประกอบทุกชั้นนิยามได้

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

การย้อนกลับต้องกลับลำดับ ทำผกผันของฟังก์ชันด้านนอกก่อน แล้วจึงย้อนด้านใน ไม่มีสูตรทั่วไปให้

$(f + g)^{-1} = f^{-1} + g^{-1}$ และไม่ควรตีความ f^{-1} เป็นกำลังลบหนึ่ง

5.6 ภาพย้อนกลับของเซต

ให้ f เป็นฟังก์ชันและ T เป็นเซต ภาพย้อนกลับของ T คือ

$$f^{-1}(T) = \{x \in D_f \mid f(x) \in T\}$$

นิยามนี้ใช้ได้แม้ f ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะเป็นการหาเซตอินพุตที่ให้ผลลัพธ์อยู่ใน T

ตัวอย่างย่อ ถ้า $f(x) = x^2$ บน $\mathbb{R}$ และ $T = [1, 4]$ จะได้

$$f^{-1}(T) = [-2, -1] \cup [1, 2]$$



5.7 จุดตรึงและจุดร่วมของกราฟ

a เป็นจุดตรึงเมื่อ $f(a) = a$ และเมื่อมีผกผัน จะเทียบเท่า

$f^{-1}(a) = a$ จุดดังกล่าวอยู่บน $y = x$ จุดร่วมของกราฟ f กับ f^{-1} ไม่จำเป็นต้องอยู่บน $y = x$ ทุกจุด เช่น $f(x) = -x$ มีผกผันเป็นตัวเอง