

1 จำนวนเต็ม การหารลงตัว และจำนวนเฉพาะ

1.1 การหารลงตัวและสมบัติสำคัญ

ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ โดย $a \neq 0$ สัญลักษณ์ $a \mid b$ หมายถึง a หาร b ลงตัว กล่าวคือ

$$a \mid b \iff b = ak \text{ สำหรับ } k \in \mathbb{Z} \text{ บางค่า}$$

ถ้า $a \nmid b$ หมายถึงหารไม่ลงตัว สำหรับ $c, u, v \in \mathbb{Z}$ มีสมบัติ

$$a \mid b, a \mid c \implies a \mid (ub + vc)$$

$$a \mid b, b \mid c \implies a \mid c \quad (b \neq 0)$$

$$a \mid b \iff |a| \mid |b|$$

$$a \mid 0 \quad (a \neq 0)$$

- เมื่อ $a, b > 0$ และ $a \mid b$ จะมี $a \leq b$
- $a \mid bc$ ไม่รับรองว่า $a \mid b$ หรือ $a \mid c$ หากไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

ตัวอย่างย่อ $6 \mid 2 \cdot 3$ แต่ $6 \nmid 2$ และ $6 \nmid 3$

1.2 ขั้นตอนวิธีการหาร

ให้ $A, B \in \mathbb{Z}$, $B \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q, r เพียงคู่เดียวที่ทำให้

$$A = Bq + r \quad 0 \leq r < |B|$$

q คือผลหาร และ r คือเศษ เศษไม่เป็นลบ แม้ตัวตั้งเป็นจำนวนลบ

ตัวอย่างย่อ $-23 = 7(-4) + 5$ ดังนั้นหาร -23 ด้วย 7 ได้

ผลหาร -4 และเศษ 5

หากโจทย์ถามเศษ ต้องปรับคำตอบให้อยู่ในช่วงที่กำหนด ไม่ใช่เศษติดลบเป็นคำตอบสุดท้าย

1.3 จำนวนคู่ จำนวนคี่ และการแยกกรณี

จำนวนคู่เขียนเป็น $2k$ และจำนวนคี่เขียนเป็น $2k + 1$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ประเภทของสองจำนวน		ผลบวก	ผลคูณ
คู่ และ คู่	คู่ และ คู่	คู่	คู่
คู่ และ คี่	คี่ และ คู่	คี่	คู่
คี่ และ คี่	คู่ และ คี่	คู่	คี่

การพิสูจน์ต้องครอบคลุมทุกกรณี ส่วนกรณีโต้แย้งเพียงหนึ่งกรณีก็ตรงเงื่อนไข ใช้หักล้างข้อความทั่วไปได้

1.4 เกณฑ์การหารลงตัวในระบบฐานสิบ

พิจารณาเลขโดดของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนที่กำหนด

ตัวหาร	เกณฑ์
2	หลักหน่วยเป็น 0, 2, 4, 6, 8
5	หลักหน่วยเป็น 0 หรือ 5
10	หลักหน่วยเป็น 0
4	จำนวนจากสองหลักท้ายหารด้วย 4 ลงตัว
8	จำนวนจากสามหลักท้ายหารด้วย 8 ลงตัว
3, 9	ผลบวกเลขโดดหารด้วย 3, 9 ลงตัวตามลำดับ
11	ผลต่างของผลบวกเลขโดดตำแหน่งสลับกันหารด้วย 11 ลงตัว

ผลต่างในเกณฑ์ของ 11 อาจเป็นศูนย์หรือจำนวนลบได้ และยังใช้ตรวจการหารลงตัวได้

1.5 จำนวนเฉพาะและจำนวนประกอบ

จำนวนเฉพาะ คือจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1 ที่มีตัวหารบวกเพียง 1 กับตัวมันเอง **จำนวนประกอบ** คือจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1 ที่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

- 0, 1 และจำนวนลบไม่อยู่ในทั้งสองประเภท
- 2 เป็นจำนวนเฉพาะคู่เพียงตัวเดียว

ถ้า $N > 1$ เป็นจำนวนประกอบ จะมี $p \mid N$, $p \leq \sqrt{N}$

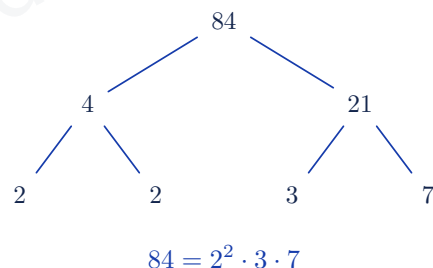
โดย p เป็นจำนวนเฉพาะ จึงตรวจสอบความเป็นจำนวนเฉพาะด้วยตัวหารเฉพาะไม่เกิน $\sqrt{N}$ ได้

1.6 การแยกตัวประกอบเฉพาะ

จำนวนเต็ม $N > 1$ เขียนได้เพียงรูปเดียว เมื่อนับลำดับของตัวประกอบ

$$N = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

โดย p_i เป็นจำนวนเฉพาะต่างกัน และ $e_i \in \mathbb{N}$ เรียกว่าเลขชี้กำลังของตัวประกอบเฉพาะ



2 ตัวหาร กำลังสมบูรณ์ ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

2.1 จำนวนตัวหารและผลบวกตัวหาร

ให้ $N = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i} > 1$ โดย p_i เป็นจำนวนเฉพาะต่างกัน และ $e_i \in \mathbb{N}$ ตัวหารบวกเลือกกำลังของแต่ละฐานได้ตั้งแต่ 0 ถึง e_i

$$\tau(N) = \prod_{i=1}^k (e_i + 1)$$

$$\sigma(N) = \prod_{i=1}^k (1 + p_i + \dots + p_i^{e_i})$$

$$\sigma(N) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

$\tau(N)$ คือจำนวนตัวหารบวก และ $\sigma(N)$ คือผลบวกตัวหารบวก โดย $\tau(1) = \sigma(1) = 1$

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$$

4

×

$$3^0, 3^1, 3^2$$

3

×

$$5^0, 5^1$$

2

ตัวอย่างย่อ $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ จึงมีตัวหารบวก $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ตัว และมีผลบวก $15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170$

2.2 ตัวหารที่มีเงื่อนไข

ในการแยกตัวประกอบของ N ข้างต้น และให้ $d, t \in \mathbb{N}$

- ตัวหารคือ: เลือกกำลังของฐาน 2 เป็นศูนย์ แล้วนับจากฐานเฉพาะที่เหลือ
- ตัวหารบวกที่เป็นพหุคูณของ d เมื่อ $d \mid N$

$$\text{จำนวน} = \tau\left(\frac{N}{d}\right) \quad \text{ผลบวก} = d\sigma\left(\frac{N}{d}\right)$$

ถ้า $d \nmid N$ จะไม่มีตัวหารในกลุ่มนี้

- ตัวหารบวกที่เป็นกำลัง t สมบูรณ์

$$\prod_{i=1}^k \left(\left\lfloor \frac{e_i}{t} \right\rfloor + 1 \right)$$

$[u]$ คือจำนวนเต็มมากที่สุดที่ไม่เกิน u ตัวหารจำนวนเต็มทั้งหมดของ $N > 0$ มี $2\tau(N)$ ตัว เมื่อนับทั้งบวกและลบ

2.3 กำลังสมบูรณ์และตัวคูณต่ำสุด

ให้ $t \in \mathbb{N}$ จะมี N เป็นกำลัง t ของจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ $t \mid e_i$ ทุกฐาน

$$N \text{ เป็นกำลังสองสมบูรณ์} \iff \tau(N) \text{ เป็นคี่}$$

ตัวคูณบวกต่ำสุดที่ทำให้ N เป็นกำลัง t สมบูรณ์ คือ

$$M = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i} \quad r_i = t \left\lceil \frac{e_i}{t} \right\rceil - e_i$$

$[u]$ คือจำนวนเต็มน้อยที่สุดที่ไม่น้อยกว่า u

ตัวอย่างย่อ ตัวคูณต่ำสุดที่ทำให้ 360 เป็นกำลังสองสมบูรณ์ คือ $2 \cdot 5 = 10$ เพราะ $3600 = 60^2$

2.4 ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

สำหรับ $a, b \in \mathbb{N}$ ห.ร.ม. คือตัวหารร่วมบวกมากที่สุด ส่วน ค.ร.น. คือพหุคูณร่วมบวกน้อยที่สุด

$$d = \gcd(a, b) \quad L = \text{lcm}(a, b)$$

ใช้ฐานเฉพาะชุดเดียวกัน เขียน $a = \prod p_i^{\alpha_i}$ และ $b = \prod p_i^{\beta_i}$ โดยกำลังที่ไม่ปรากฏให้เป็นศูนย์

$$\gcd(a, b) = \prod p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$$

$$\text{lcm}(a, b) = \prod p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

จำนวน	กำลังของ 2	กำลังของ 3	กำลังของ 5
72	3	2	0
120	3	1	1
ห.ร.ม.	3	1	0
ค.ร.น.	3	2	1
$\gcd(72, 120) = 24 \quad \text{lcm}(72, 120) = 360$			

2.5 เอกลักษณ์ผลคูณและการลดรูป

สำหรับ $a, b > 0$ เป็นจำนวนเต็ม มี

$$\gcd(a, b) \text{ lcm}(a, b) = ab$$

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, b + ka) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\gcd(ka, kb) = |k| \gcd(a, b) \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$$

ถ้า $d = \gcd(a, b)$ จะได้

$$\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

หลายจำนวนเลือกกำลังต่ำสุดหรือสูงสุดได้เช่นเดิม แต่เอกลักษณ์ผลคูณใช้ทั่วไปกับสองจำนวนเท่านั้น จำนวนลบใช้ค่าสัมบูรณ์ก่อน และ $\gcd(a, 0) = |a|$ เมื่อ $a \neq 0$ ในเอกสารนี้ไม่ใช้ ค.ร.น. กับศูนย์

2.6 จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์และการตัดตัวคูณ

จำนวนเต็มบวก a, b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์เมื่อ $\gcd(a, b) = 1$ แม้แต่ละจำนวนอาจไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

$$\gcd(a, b) = 1, a \mid bc \implies a \mid c \quad (c \in \mathbb{Z})$$

เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $u, v \in \mathbb{Z}$ จะมี

$$p \mid uv \implies p \mid u \text{ หรือ } p \mid v$$

ตัวอย่างย่อ 8 กับ 9 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ แต่ทั้งสองเป็นจำนวนประกอบ

3 ยุคคติ เบซู และสมการจำนวนเต็ม

3.1 ขั้นตอนวิธีของยุคลิด

ให้ $a \geq b > 0$ เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $a = bq + r$ และ $0 \leq r < b$ จะได้

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$$

หารซ้ำจนเศษเป็นศูนย์ หรือเศษไม่เป็นศูนย์ตัวสุดท้าย หรือเท่ากับตัวหารในบรรทัดสุดท้าย



ตัวอย่างย่อ หา $\gcd(252, 198)$

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2 + 0$$

จึงได้ $\gcd(252, 198) = 18$

3.2 เอกลักษณ์ของเบซู

ให้ $a, b \in \mathbb{N}$ และ $d = \gcd(a, b)$ จะมีจำนวนเต็ม x, y ที่ทำให้

$$ax + by = d$$

หาค่าสัมประสิทธิ์โดยแทนเศษกลับจากขั้นตอนยุคลิด ไม่จำเป็นต้องทดลองค่า x, y ที่ละคู่

ตัวอย่างย่อ จากตัวอย่างยุคลิดข้างต้น

$$18 = 54 - 36$$

$$= 4 \cdot 54 - 198$$

$$= 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198$$

3.3 สมการเชิงเส้นในจำนวนเต็ม

ให้ $a, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{Z}$ และ $d = \gcd(a, b)$ สมการ

$$ax + by = c \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

มีคำตอบก็ต่อเมื่อ $d \mid c$ หากมีคำตอบหนึ่ง (x_0, y_0) คำตอบทั้งหมดเขียนได้เป็น

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

โดย $t \in \mathbb{Z}$ ถ้า $d \nmid c$ จะไม่มีคำตอบจำนวนเต็ม

3.4 พหุนามกับการหารลงตัว

ให้ $f(x)$ เป็นพหุนามสัมประสิทธิ์จำนวนเต็ม ถ้า $u, v \in \mathbb{Z}$ และ $u \neq v$ จะได้

$$u - v \mid f(u) - f(v)$$

3.5 คำตอบบวกและคำตอบไม่เป็นลบ

ให้ $a, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{Z}, d = \gcd(a, b)$ และ (x_0, y_0) เป็นคำตอบหนึ่งของ $ax + by = c$ ถ้าต้องการ $x, y \geq 0$ จะได้

$$-\frac{x_0 d}{b} \leq t \leq \frac{y_0 d}{a} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

ถ้าต้องการ $x, y > 0$ ให้เปลี่ยน $\leq$ ทั้งสองตำแหน่งเป็น $<$ แล้วเลือกเฉพาะจำนวนเต็มในช่วง

ตัวอย่างย่อ $6x + 9y = 30$ มีคำตอบหนึ่ง $(5, 0)$ และ $d = 3$ จึงได้

$$x = 5 + 3t \quad y = -2t$$

เงื่อนไขไม่เป็นลบให้ $-\frac{5}{3} \leq t \leq 0$ จึงมี $t = -1, 0$ และได้คู่ $(2, 2), (5, 0)$

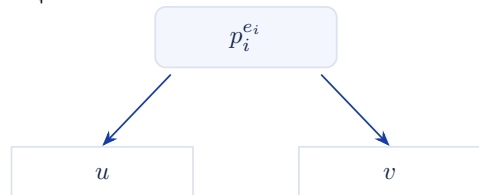
3.6 คู่จำนวนจาก ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

ให้ $x, y, g, L \in \mathbb{N}$ และกำหนด $\gcd(x, y) = g, \text{lcm}(x, y) = L$ ต้องมี $g \mid L$ แล้วเขียน

$$x = gu \quad y = gv \quad uv = \frac{L}{g}$$

โดย $u, v \in \mathbb{N}$ และ $\gcd(u, v) = 1$ ถ้า $\frac{L}{g} > 1$ เขียนแยก

ตัวประกอบเฉพาะเป็น $\prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$ แต่ละฐานจึงต้องอยู่ใน u หรือ v ทั้งชุด



เลือกหนึ่งด้าน

เมื่อมีฐานเฉพาะต่างกัน k ฐาน จะได้

$$2^k \text{ คู่อันดับ} \quad 2^{k-1} \text{ คู่ที่มี } x < y$$

ถ้า $\frac{L}{g} = 1$ มีเพียงคู่ (g, g) ส่วนกรณี $g \nmid L$ ไม่มีคู่ที่สอดคล้อง

ตัวอย่างย่อ ถ้า $g = 2, L = 144$ จะมี $\frac{L}{g} = 2^3 \cdot 3^2$ จึงมี

คู่อันดับ 4 คู่ ได้แก่ $(2, 144), (16, 18), (18, 16), (144, 2)$

3.7 ผลคูณที่เป็นจำนวนเฉพาะ

ถ้า $u, v \in \mathbb{Z}$ และ $uv = p$ โดย p เป็นจำนวนเฉพาะบวก จะได้

$$\{|u|, |v|\} = \{1, p\} \quad uv > 0$$

เมื่อแยกตัวประกอบนิพจน์แล้ว ต้องตรวจทั้งตัวประกอบ 1 และ -1 พร้อมเครื่องหมายของอีกตัวหนึ่งก่อนสรุปคำตอบ

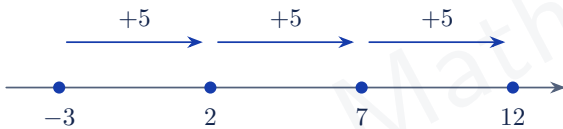
4 สมภาค เศษเหลือ และคาบของกำลัง

4.1 สมภาคและขั้นเศษ

ให้ $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ สัญลักษณ์

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a - b)$$

หมายถึง a, b หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน โดย m เรียกว่า โมดูลัส



จำนวนในภาพต่างกันทีละ 5 และเหลือเศษ 2 เมื่อหารด้วย 5

ตัวอย่างย่อ $-3 \equiv 2 \equiv 7 \equiv 12 \pmod{5}$

4.2 การคำนวณด้วยสมภาค

ถ้า $a \equiv r$ และ $b \equiv s \pmod{m}$ จะมี

$$a + b \equiv r + s \pmod{m}$$

$$a - b \equiv r - s \pmod{m}$$

$$ab \equiv rs \pmod{m}$$

$$a^k \equiv r^k \pmod{m} \quad (k \in \mathbb{N})$$

ลดเศษระหว่างกรคำนวณได้ แต่การหารหรือตัดตัวคูณต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติม

4.3 อินเวอร์สและสมภาคเชิงเส้น

ให้ $m \in \mathbb{N}, m > 1$ และ $a, b \in \mathbb{Z}$ จำนวนเต็ม c เป็นอินเวอร์สของ a เมื่อ

$$ac \equiv 1 \pmod{m}$$

มีอินเวอร์สก็ต่อเมื่อ $\gcd(a, m) = 1$ และในกรณีนี้ตัดตัวคูณ a

ออกจากสมภาคได้ สำหรับ $ax \equiv b \pmod{m}$ ให้

$d = \gcd(a, m)$ จะมีคำตอบก็ต่อเมื่อ $d \mid b$ แล้วลดเป็น

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

ตัวอย่างย่อ $6x \equiv 8 \pmod{10}$ ลดเป็น $3x \equiv 4 \pmod{5}$ จึงได้ $x \equiv 3 \pmod{5}$

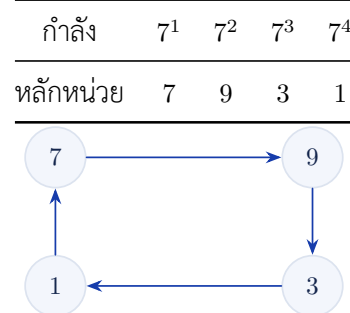
เมื่อมีตัวหารร่วม ห้ามหารสัมประสิทธิ์แล้วคงโมดูลัสเดิมไว้

4.4 คาบของกำลังและหลักหน่วย

ให้ $m, h \in \mathbb{N}, m > 1, a \in \mathbb{Z}$ ถ้า $a^h \equiv 1 \pmod{m}$ และ $n = qh + r$ เมื่อ $n, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, r < h$ จะได้

$$a^n \equiv a^r \pmod{m}$$

ต้องตรวจคาบก่อนลดเลขชี้กำลัง ฐานที่ไม่มีอินเวอร์สจะไม่มีกำลังบวกที่เหลือเศษ 1



ตัวอย่างย่อ $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ จึงมี 7^{2026} ลงท้ายด้วย 9 สำหรับหน่วยจินตภาพ i ที่ $i^2 = -1$ และ $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ กำลังมีคาบ 4 เช่นกัน

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

4.5 เศษหลายเงื่อนไข

ให้ $a, b \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}$ ระบบ

$$n \equiv r \pmod{a} \quad n \equiv s \pmod{b}$$

มีคำตอบก็ต่อเมื่อ $\gcd(a, b) \mid (s - r)$ เมื่อพบคำตอบหนึ่ง n_0 คำตอบทั้งหมดคือ

$$n = n_0 + \text{lcm}(a, b)t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

หา n_0 โดยแทน $n = aq + r$ ในเงื่อนไขที่สอง แล้วแก้หาจำนวนเต็ม q

ตัวอย่างย่อ $n \equiv 1 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{6}$ มีคำตอบ $n = 9 + 12t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$

4.6 ตัวหารไม่ทราบค่าและเศษร่วม

ให้ A, B เป็นจำนวนเต็ม และ $D > 0$ เป็นจำนวนเต็มที่ใช้หาร ถ้าเหลือเศษร่วม r จะต้องมี

$$D \mid (A - B) \quad 0 \leq r < D$$

เมื่อทราบ r และ $A - r, B - r$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะได้เงื่อนไขที่ใช้เลือก D

$$D \mid \gcd(A - r, B - r) \quad D > r \geq 0$$

ถ้าโจทย์กำหนดเศษต่างกัน ให้ลบทั้งตัวตั้งและเศษก่อนพิจารณาการหารลงตัว แล้วตรวจช่วงเศษเดิมทุกครั้ง

5 การนับ จำนวนเฉพาะสัมพันธ์ และการประยุกต์

5.1 นับพหุคูณและจำนวนที่มีเศษกำหนด

ให้ $L, U, m, r \in \mathbb{Z}$, $L \leq U$, $m > 0$, $0 \leq r < m$ และ $[x]$ คือจำนวนเต็มมากที่สุดที่ไม่เกิน x จำนวนพหุคูณของ m ในช่วง $L \leq n \leq U$ เท่ากับ

$$\left\lfloor \frac{U}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{L-1}{m} \right\rfloor$$

จำนวนที่ $n \equiv r \pmod{m}$ ในช่วงเดียวกันเท่ากับ

$$\left\lfloor \frac{U-r}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{L-1-r}{m} \right\rfloor$$

ตัวอย่างย่อ จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่หารด้วย 6 ลงตัวมี $\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ จำนวน

5.2 หลักบทกลรวม

ให้ A, B, C เป็นเซตจำกัด โดย $n(A)$ คือจำนวนสมาชิกของ A

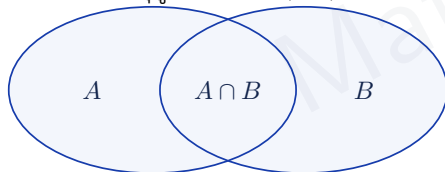
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

$$+ n(A \cap B \cap C)$$

ถ้า A คือพหุคูณของ a และ B คือพหุคูณของ b ในช่วงเดียวกัน ส่วนร่วมคือพหุคูณของ $\text{lcm}(a, b)$



ตัวอย่างย่อ ในช่วง 1 ถึง 100 หารด้วย 4 หรือ 6 ลงตัวมี $25 + 16 - 8 = 33$ จำนวน โดยส่วนร่วมหารด้วย 12 ลงตัว

5.3 ผลบวกสมาชิกที่มีผลต่างร่วม

ให้สมาชิกที่เลือกเรียงเป็น $a_1, \dots, a_n$ มีผลต่างร่วม $d > 0$ และ $n \geq 1$ จะได้

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

S_n คือผลบวกสมาชิกทั้งหมด ต้องหาพจน์แรกและพจน์สุดท้ายที่ผ่านเงื่อนไขจริงก่อนใช้สูตร

5.4 การนับจำนวนเฉพาะสัมพันธ์

ให้ $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$ มีฐานเฉพาะต่างกัน $p_1, \dots, p_k$

จำนวนเต็ม $1 \leq n \leq M$ ที่มี $\gcd(n, M) = 1$ มีจำนวน

$$\varphi(M) = M \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

กำหนด $\varphi(1) = 1$ ถ้า $d \mid M$ และ $d > 0$ เงื่อนไข

$\gcd(n, M) = d$ แปลงได้เป็น

$$n = dt \quad \gcd\left(t, \frac{M}{d}\right) = 1$$

ในช่วง $1 \leq n \leq M$ จึงมี $\varphi\left(\frac{M}{d}\right)$ จำนวน

ตัวอย่างย่อ จำนวนที่เฉพาะสัมพันธ์กับ 12 ในช่วง 1 ถึง 12 คือ 1, 5, 7, 11 มี $12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$ จำนวน

5.5 พจน์ร่วมและเหตุการณ์ที่เกิดเป็นรอบ

ให้ลำดับมีพจน์แรก $a, b \in \mathbb{Z}$ และผลต่างร่วม $d, e \in \mathbb{N}$ พจน์ร่วม n ต้องทำให้

$$n = a + dt = b + es \quad t, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

ใช้สมการหาค่าร่วม แล้วตรวจว่าพจน์นั้นไม่อยู่ก่อนจุดเริ่มของทั้งสองลำดับ ถ้าพจน์ร่วมแรกคือ c คาบร่วม $h = \text{lcm}(d, e)$ ผลบวก k พจน์ร่วมแรกคือ

$$\frac{k}{2}[2c + (k-1)h] \quad (k \in \mathbb{N})$$

ถ้าเหตุการณ์เกิดร่วมครั้งแรกเวลา t_0 และเกิดซ้ำทุก $h > 0$ ถึงเวลา $T \geq t_0$ จะมีจำนวนครั้งรวมปลายช่วง

$$\left\lfloor \frac{T - t_0}{h} \right\rfloor + 1$$

5.6 เชื่อมการนับกับความน่าจะเป็น

ให้ $E \subseteq \Omega$ โดย Ω จำกัดไม่ว่าง ทุกผลลัพธ์มีโอกาสเท่ากัน และ $n(X)$ คือจำนวนสมาชิกของเซต X

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

สุ่มจำนวนจาก 1 ถึง N อย่างอิสระและโอกาสเท่ากัน k ครั้ง เมื่อ $N, k \in \mathbb{N}$ จะมีผลลัพธ์แบบเรียงลำดับ N^k แบบ ผลคูณเป็นจำนวนเฉพาะได้เมื่อมีหนึ่งจำนวนเป็นจำนวนเฉพาะ และอีก $k-1$ จำนวนเป็น 1

ตัวอย่างย่อ สุ่มจาก 1 ถึง 6 สองครั้ง มีจำนวนเฉพาะ 3 ค่า จึงมีผลคูณเฉพาะ $2 \cdot 3 = 6$ แบบ และมีความน่าจะเป็น $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$