

1 แบบจำลอง ตัวแปร และข้อจำกัด

1.1 องค์ประกอบของกำหนดการเชิงเส้น

หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ ภายใต้ข้อจำกัดและโดเมนที่กำหนด

$$\max \text{ หรือ } \min P = ax + by + c$$

$$a_ix + b_iy \leq d_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

x, y คือตัวแปรตัดสินใจ a, b, c, a_i, b_i, d_i เป็นค่าคงตัว และ m คือจำนวนข้อจำกัด ข้อจำกัดอาจใช้ $\geq$ หรือ $=$ ได้ตามสถานการณ์

- ระบุความหมายและหน่วยของ x, y ให้ชัดเจน
 - แยกสิ่งที่ต้องการหาค่าออกจากเงื่อนไขที่ต้องผ่าน
- เมื่อศึกษาด้วยกราฟ พิจารณาตัวแปรตัดสินใจสองตัวเป็นหลัก

1.2 โดเมนและความเป็นเชิงเส้น

ปริมาณ	โดเมนที่มักใช้
จำนวนคนหรือจำนวนชิ้น	$x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
น้ำหนักหรือเวลาที่แบ่งได้	$y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
พิกัดทั่วไป	ตามเงื่อนไขโจทย์

ไม่เพิ่มเงื่อนไขไม่ติดลบหากความหมายไม่รองรับ อนุญาตปริมาณศูนย์ใช้ $x \geq 0$ ส่วนอย่างน้อยหนึ่งชิ้นใช้ $x \geq 1$ เมื่อเป็นจำนวนเต็ม

นิพจน์เชิงเส้นไม่มี x^2, y^2, xy หรือฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นของตัวแปรตัดสินใจ

$$P = (t^2 - 1)x + ty$$

ยังเป็นเชิงเส้นใน x, y เมื่อพารามิเตอร์ t คงที่ ค่าคงตัวที่บวกใน P เปลี่ยนค่า แต่ไม่เปลี่ยนตำแหน่งที่ดีที่สุด

1.3 แปลถ้อยคำเป็นเงื่อนไข

ถ้อยคำ	รูปคณิตศาสตร์
รวมไม่เกิน M	$x + y \leq M$
รวมอย่างน้อย L	$x + y \geq L$
รวมเท่ากับ T	$x + y = T$
x อย่างน้อย r เท่าของ y	$x \geq ry$
y เกิน x ได้ไม่เกิน d	$y - x \leq d$

M, L, T, r, d เป็นค่าคงตัวตามโจทย์ เงื่อนไขผลต่างข้อสุดท้ายไม่บังคับ $y > x$ หากต้องมากกว่าจริง ต้องมี $y > x$ เพิ่มด้วย

คุณหรือหารอสมการด้วยจำนวนลบต้องกลับเครื่องหมาย

1.4 ตารางทรัพยากรและแบบจำลอง

ให้ x, y เป็นปริมาณผลิตสองชนิด r_i, s_i เป็นทรัพยากรชนิดที่ i ต่อหน่วย และ M_i เป็นปริมาณที่มี

$$r_ix + s_iy \leq M_i$$

ถ้าเป็นผลผลิตหรือสารอาหารขั้นต่ำ L_i เปลี่ยนเป็น

$$r_ix + s_iy \geq L_i \text{ หน่วยของทุกพจน์ในแถวต้องตรงกัน}$$

ตัวอย่างย่อ ผลิตของเหลวชนิดแรก x ลิตร ชนิดสอง y ลิตร แบ่งได้ มีข้อมูลต่อไปนี้

ต่อหนึ่งลิตร	ชนิดแรก	ชนิดสอง	ปริมาณรวม
วัตถุดิบ (หน่วย)	2	1	มี 12
เวลา (ชั่วโมง)	1	2	มี 12
กำไร (บาท)	3	4	ต้องการสูงสุด

$$\max P = 3x + 4y$$

$$2x + y \leq 12, \quad x + 2y \leq 12$$

$$x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

1.5 กำไรและเงื่อนไขส่วนผสม

ให้ s_x, s_y เป็นราคาขายต่อหน่วย c_x, c_y เป็นต้นทุนแปรผันต่อหน่วย และ F เป็นต้นทุนคงที่

$$R = s_xx + s_yy, \quad C = c_xx + c_yy + F$$

$$P = R - C = (s_x - c_x)x + (s_y - c_y)y - F$$

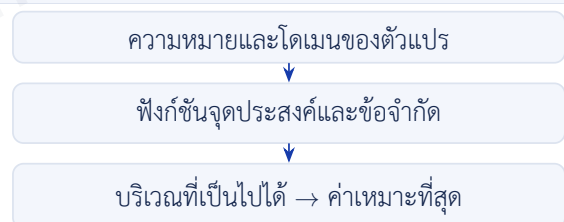
R, C, P คือรายได้ ต้นทุนรวม และกำไร ตามลำดับ ไม่ใช่รายได้แทนกำไรเมื่อมีต้นทุน

ถ้า $x, y \geq 0$ เป็นน้ำหนักส่วนผสม $x + y > 0$ และชนิดแรกมีสัดส่วนอย่างน้อย q โดย $0 \leq q \leq 1$

$$\frac{x}{x+y} \geq q \iff (1-q)x \geq qy$$

เช่น อย่างน้อย 40% ให้ $3x \geq 2y$ โดยต้องคงเงื่อนไขปริมาณรวมไว้ด้วย

1.6 ลำดับการแก้ปัญหา



ตรวจหน่วยก่อนย่อสัมประสิทธิ์ รายงานปริมาณของแต่ละตัวแปร ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ และหน่วยตามความหมายเดิม

สรุปเนื้อหา เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

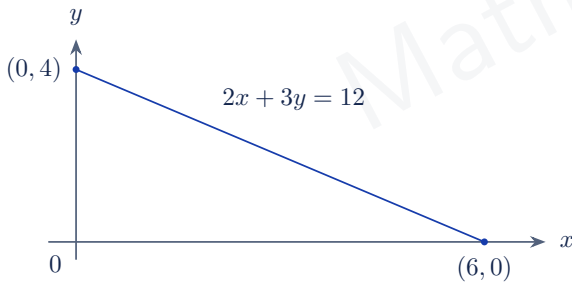
2 เส้นขอบ บริเวณที่เป็นไปได้ และจุดมุม

2.1 เส้นขอบและจุดตัดแกน

เส้น $ax + by = d$ โดย $(a, b) \neq (0, 0)$ มีจุดตัดแกน

$$\left(\frac{d}{a}, 0\right) \quad (a \neq 0), \quad \left(0, \frac{d}{b}\right) \quad (b \neq 0)$$

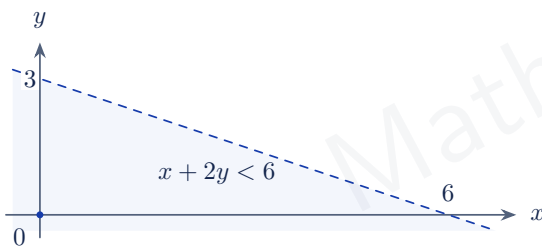
เมื่อ $b \neq 0$ มีความชัน $-\frac{a}{b}$ ถ้า $a = 0$ เส้นแนวนอน ถ้า $b = 0$ เส้นแนวตั้ง หากจุดตัดแกนซ้ำกันที่จุดกำเนิด ต้องหาจุดอื่นเพิ่ม



2.2 ครึ่งระนาบและจุดทดสอบ

วาดเส้นขอบก่อน เลือกจุดที่ไม่อยู่บนเส้น แล้วแทนในอสมการ ถ้าเป็นจริงให้เลือกด้านที่มีจุดนั้น

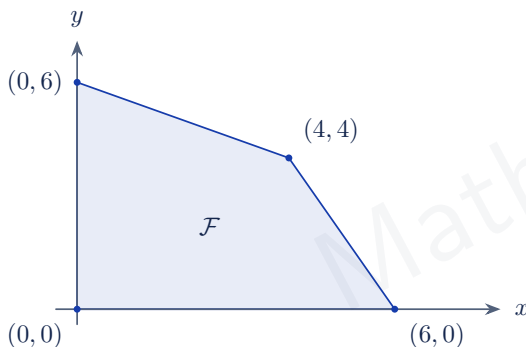
$\leq, \geq$: เส้นทึบ $<, >$: เส้นประ



รูปแสดง $x + 2y < 6$ ด้านที่มี $(0, 0)$ ไม่รวมเส้นขอบ บริเวณจริงแผ่ออกไปเกินกรอบภาพ

2.3 บริเวณที่เป็นไปได้

ให้ $\mathcal{F}$ เป็นจุดที่ผ่านทุกข้อจำกัดพร้อมกัน และอยู่ในโดเมนกรณีจำนวนจริง บริเวณเกิดจากส่วนร่วมของครึ่งระนาบ



ตัวอย่าง $2x + y \leq 12$, $x + 2y \leq 12$, $x, y \geq 0$ มีจุดมุม $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 6)$

2.4 จุดตัดและการคัดจุดมุม

เส้น $a_1x + b_1y = c_1$ และ $a_2x + b_2y = c_2$ กำหนด

$D = a_1b_2 - a_2b_1$ ถ้า $D \neq 0$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{D}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{D}$$

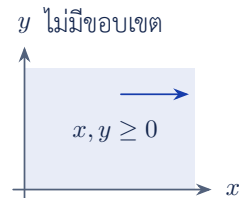
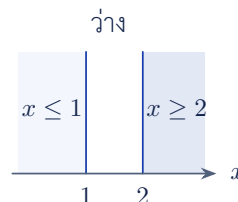
ถ้า $D = 0$ ตรวจสอบว่าเส้นขนานหรือทับกัน

- หาจุดตัดเส้นขอบเป็นคู่ รวมแกนเมื่อเป็นข้อจำกัด
- ตรวจสอบทุกสมการก่อนรับจุดตัดเป็นจุดของบริเวณ
- เรียงจุดมุมตามแนวรอบรูป ไม่เรียงตามขนาดพิกัด

ตัวอย่างย่อ $(0, 12)$ อยู่บน $2x + y = 12$ แต่ไม่ผ่าน $x + 2y \leq 12$ จึงไม่เป็นจุดมุมของรูปใน 2.3

2.5 ลักษณะของบริเวณ

ลักษณะ	ข้อสังเกต
ว่าง	ไม่มีจุดผ่านทุกข้อ
มีขอบเขต	อยู่ในกรอบขนาดจำกัดได้
ไม่มีขอบเขต	แผ่ออกไปได้ไม่จำกัด
เป็นเส้นหรือจุด	อาจมีพื้นที่เป็นศูนย์



บริเวณว่างไม่มีคำตอบ ส่วนบริเวณไม่มีขอบเขตยังอาจมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดด้านหนึ่งได้ ต้องตรวจฟังก์ชันจุดประสงค์แยกต่างหาก $x + y = 3$, $x, y \geq 0$ เป็นส่วนของเส้นตรง แม้พื้นที่เป็นศูนย์ก็มีจุดเป็นไปได้

2.6 พื้นที่และความยาวรอบรูป

ให้ $V_i = (x_i, y_i)$ เป็นจุดมุมเรียงรอบรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย และ $V_{n+1} = V_1$ สูตรเชอกรองเท้าคือ

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) \right|$$

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

ความยาวรอบรูปเท่ากับ $\sum_{i=1}^n l_i$ โดย l_i เป็นความยาวด้าน $V_i V_{i+1}$

ตัวอย่างย่อ รูปใน 2.3 มีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย และความยาวรอบรูป $12 + 4\sqrt{5}$ หน่วย พื้นที่ของบริเวณไม่ใช่จำนวนจุดพิกัดจำนวนเต็ม

สรุปเนื้อหา เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

3 การหาค่าเหมาะที่สุดและกรณีที่ต้องแยกพิจารณา

3.1 หลักจุดมุม

ถ้าบริเวณไม่ว่าง เป็นรูปหลายเหลี่ยมปิดที่มีขอบเขต ฟังก์ชันเชิงเส้นมีค่าสูงสุดและต่ำสุด โดยมีจุดมุมอย่างน้อยหนึ่งจุดให้ค่านั้น

$$P((1 - \lambda)A + \lambda B) = (1 - \lambda)P(A) + \lambda P(B)$$

A, B อยู่ในบริเวณ และ $0 \leq \lambda \leq 1$ ค่าที่จุดระหว่างกลางไม่เกินค่าสูงสุดของปลายทั้งสอง

ตัวอย่างย่อ ใช้บริเวณใน 2.3 และ $P = 3x + 4y$

จุดมุม	(0, 0)	(6, 0)	(4, 4)	(0, 6)
P	0	18	28	24

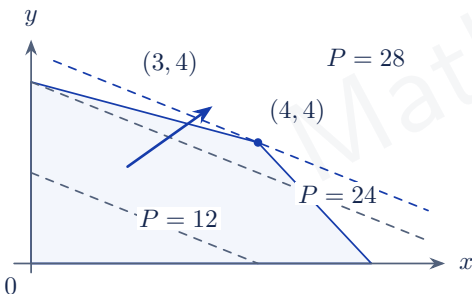
สูงสุด 28 ที่ (4, 4) ต่ำสุด 0 ที่ (0, 0)

3.2 เส้นระดับและทิศทางเพิ่มค่า

สำหรับ $P = ax + by + c$ เส้นระดับ $P = k$ คือ

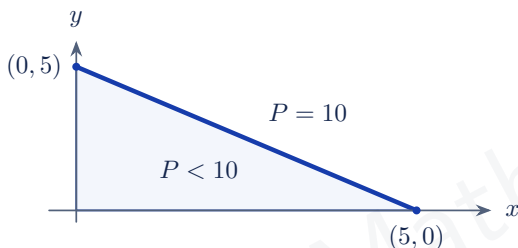
$$ax + by = k - c, \quad m = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

เมื่อ $(a, b) \neq (0, 0)$ ค่าเพิ่มในทิศ (a, b) และลดในทิศตรงข้ามเส้นระดับขนานกัน



ภาพใช้ $P = 3x + 4y$ ค่าเพิ่มตามลูกศร ไม่อาจสรุปว่าเส้นเลื่อนขึ้นเสมอเมื่อ $b < 0$ ถ้า $b = 0$ เส้นระดับเป็นแนวตั้ง

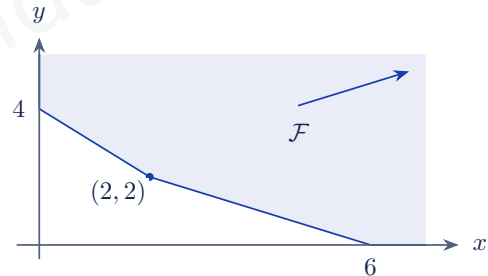
3.3 คำตอบเดียวและหลายคำตอบ



บนรูปปิดมีขอบเขต ถ้าจุดมุมติดกันให้ค่าที่ดีที่สุดเท่ากัน ทุกจุดบนด้านเชื่อมให้ค่าเดียวกัน ภาพใช้ $P = 2x + 2y$ บน $x + y \leq 5, x, y \geq 0$ สูงสุด 10 ตลอดด้าน $x + y = 5$ ถ้าจุดมุมเดียวให้ค่าที่ดีที่สุดอย่างเข้ม จุดนั้นเป็นคำตอบเดียว หาก $a = b = 0$ ฟังก์ชันคงตัว ทุกจุดที่เป็นไปได้เหมาะสม

3.4 บริเวณไม่มีขอบเขต

บริเวณที่แผ่ออกไปไม่จำเป็นต้องทำให้ฟังก์ชันเพิ่มหรือลดได้ไม่จำกัด ต้องตรวจทิศที่ผ่านข้อจำกัดด้วย



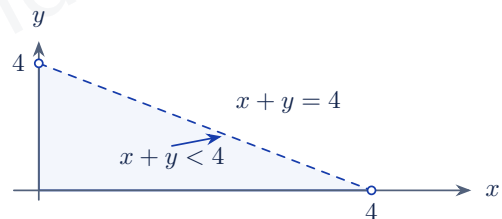
ตัวอย่างย่อ หา $C = 3x + 4y$ ต่ำสุด เมื่อ

$$x + y \geq 4, \quad x + 2y \geq 6, \quad x, y \geq 0$$

$$C = 2(x + y) + (x + 2y) \geq 2(4) + 6 = 14$$

จุด (2, 2) ผ่านและให้ 14 จึงเป็นค่าต่ำสุด ส่วนค่าสูงสุดไม่มี เพราะเลือก $(t, 0)$ เมื่อ $t \geq 6$ ให้ $C = 3t$ เพิ่มได้ไม่จำกัด

3.5 อสมการเข้มและค่าที่ไม่เกิดขึ้น



สำหรับจำนวนจริง $x, y \geq 0, x + y < 4$ ค่า $P = x + y$ น้อยกว่า 4 เสมอ แต่เข้าใกล้ 4 ได้ จึงไม่มีค่าสูงสุด

หากเปลี่ยนเป็น $x, y > 0, x + y \leq 4$ ยังมีจุด (2, 2) ให้ค่า 4 ได้ จึงมีค่าสูงสุด ต้องตรวจว่ามีจุดใดให้ค่าที่ขอบจริง บางบริเวณไม่มีจุดมุมแต่มีค่าเหมาะสม เช่น $y \geq 0$ ให้ $P = y$ มีค่าต่ำสุด 0 ตลอดแกน x

3.6 ยืนยันขอบเขตด้วยอสมการ

ถ้า $a_i x + b_i y \leq c_i$ เลือก $\lambda_i \geq 0$ ให้

$$\sum_i \lambda_i a_i = a, \quad \sum_i \lambda_i b_i = b$$

$$ax + by \leq \sum_i \lambda_i c_i$$

ถ้าพบจุดที่ผ่านทุกข้อและให้ความหมายเท่ากัน จะยืนยันค่าสูงสุดได้ ค่าต่ำสุดใช้การรวมอสมการที่รองรับขอบเขตล่าง

ตัวอย่างย่อ $x + y \leq 6, x + 2y \leq 8$ ให้

$$3x + 4y = 2(x + y) + (x + 2y) \leq 20 \quad \text{จุด } (4, 2) \text{ ให้เท่ากัน จึงสูงสุด } 20$$

4 จำนวนเต็ม ตัวแปรแบบผสม และทรัพยากรเหลือ

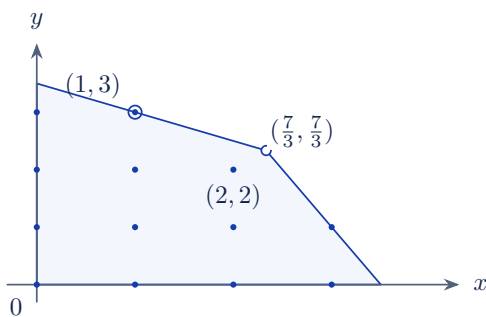
4.1 แบบจำลองจำนวนจริงเป็นขอบเขต

ให้ $P_{\mathbb{R}}^{\max}, P_{\mathbb{Z}}^{\max}$ เป็นค่าสูงสุดของแบบจำลองจำนวนจริงและจำนวนเต็มบนข้อจำกัดเดียวกัน ตามลำดับ เมื่อค่าเหล่านี้มีอยู่

$$P_{\mathbb{Z}}^{\max} \leq P_{\mathbb{R}}^{\max}, \quad P_{\mathbb{Z}}^{\min} \geq P_{\mathbb{R}}^{\min}$$

สูตรหลังใช้สัญลักษณ์ $\min$ สำหรับค่าต่ำสุด ถ้าจุดที่ดีที่สุดของแบบจำลองจำนวนจริงเป็นจำนวนเต็มและผ่านเงื่อนไขเดิม ใช้เป็นคำตอบจำนวนเต็มได้ทันที จำนวนเต็มที่เป็นไปได้มีน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนจริงที่เป็นไปได้ แต่บางปัญหาอาจไม่มีแผนจำนวนเต็มเลย

4.2 การปิดไม่รับรองค่าเหมาะที่สุด



ตัวอย่าง $\max P = 3x + 4y$ เมื่อ

$$2x + y \leq 7, \quad x + 2y \leq 7, \quad x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

แผน	ความเป็นไปได้	P
$(\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$	จำนวนจริง	$\frac{49}{3}$
(2, 2) ปิดลง	ผ่าน	14
(3, 3) ปิดขึ้น	ไม่ผ่าน	ใช้ไม่ได้
(1, 3)	ผ่าน	15

แผนที่ปิดลงอาจผ่านแต่ไม่ดีที่สุด จึงต้องตรวจแผนจำนวนเต็มใหม่

4.3 ตรวจทีละแนวตั้ง

ให้ $P = ax + by$ และกำหนด $x = k$ ทีละจำนวนเต็ม รวมข้อจำกัดเป็น $L(k) \leq y \leq U(k)$ โดย L เป็นขอบล่างสูงสุด และ U เป็นขอบบนต่ำสุด

	สูงสุด	ต่ำสุด
$b > 0$	y มากที่สุด	y น้อยที่สุด
$b < 0$	y น้อยที่สุด	y มากที่สุด
$b = 0$	ค่าไม่ขึ้นกับ y แต่ต้องมีค่า y ที่ผ่าน	

เลือกปลายจำนวนเต็มที่ผ่านทุกข้อ ตัดค่า k ที่ไม่มีแผน แล้วเปรียบเทียบครบทุก k ที่เป็นไปได้

4.4 ขอบจำนวนเต็มและการนับจุด

สำหรับ $y \in \mathbb{Z}$ และ L, U เป็นจำนวนจริง

$$L \leq y \leq U \iff [L] \leq y \leq [U]$$

$[L]$ คือจำนวนเต็มน้อยที่สุดที่ไม่น้อยกว่า L ส่วน $[U]$ คือจำนวนเต็มมากที่สุดที่ไม่เกิน U

$$y < U \iff y \leq [U] - 1$$

$$y > L \iff y \geq [L] + 1$$

ที่ $x = k$ จำนวนจุดของช่วงปิดคือ

$$N_k = \max(0, [U(k)] - [L(k)] + 1)$$

นับรวมโดย $N = \sum_k N_k$ เมื่อช่วง k จำกัด ขอบเข้มต้องปรับเป็นขอบจำนวนเต็มที่ผ่านมาจนใช้สูตร

ตัวอย่างย่อ $x + y \leq 3, x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ มี $x = 0, 1, 2, 3$ ให้จำนวนค่า y เท่ากับ 4, 3, 2, 1 รวม 10 จุด

4.5 ตัวแปรแบบผสม

ถ้า x ต้องเป็นจำนวนเต็ม แต่ y แบ่งได้ ให้ตรึง $x = k$ แล้วเลือกปลายช่วงของ y ตามเครื่องหมายสัมประสิทธิ์ โดย **ไม่ปิด** y เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่างย่อ จำนวนงาน $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ และเวลา $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ มี $x \leq 2, x + y \leq \frac{7}{2}$ ต้องการ $P = 3x + 2y$ สูงสุด

x	0	1	2
y มากที่สุด	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
P	7	8	9

สูงสุด 9 ที่ $(2, \frac{3}{2})$ การบังคับ y เป็นจำนวนเต็มจะเปลี่ยนปัญหาและอาจทำให้ค่าที่ได้ลดลง

4.6 ข้อจำกัดตั้งตัวและการรับรอง

สำหรับข้อจำกัด $a_i x + b_i y \leq c_i$ ให้ s_i เป็นทรัพยากรเหลือ

$$s_i = c_i - a_i x - b_i y \geq 0$$

ถ้า $s_i = 0$ ข้อจำกัดตั้งตัว ส่วนข้อจำกัดขั้นต่ำ $a_i x + b_i y \geq c_i$ ใช้ส่วนเกิน $a_i x + b_i y - c_i$ ไม่ใช่สูตรทรัพยากรเหลือแทน

ตัวอย่างย่อ $2x + y \leq 11, x + 2y \leq 11$ และ $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ให้ $x + y \leq \frac{22}{3}$ จึง $x + y \leq 7$ ดังนั้น $P = 5x + 5y \leq 35$ จุด (3, 4), (4, 3) ผ่านและให้ 35 จึงเหมาะสม
แผนจำนวนเต็มที่ดีที่สุดอาจมีทรัพยากรเหลือ ไม่จำเป็นต้องใช้หมดทุกชนิด

5 พารามิเตอร์ ความชัน และการย้อนจากค่าเหมาะสม

5.1 การขยายและเลื่อนค่าฟังก์ชัน

ให้ $Q = \lambda P + c$ บนบริเวณเดิม โดย λ, c คงที่ และค่าเหมาะสมที่อ้างอิงมีอยู่

	$Q_{\max}$	$Q_{\min}$
$\lambda > 0$	$\lambda P_{\max} + c$	$\lambda P_{\min} + c$
$\lambda < 0$	$\lambda P_{\min} + c$	$\lambda P_{\max} + c$

ตัวคูณบวกรักษาตำแหน่งที่ดีที่สุด ตัวคูณลบสลับตำแหน่งสูงสุดกับต่ำสุด ถ้า $\lambda = 0$ ทุกจุดให้ $Q = c$

ตัวอย่างย่อ ถ้า $P_{\min} = 3, P_{\max} = 12$ และ $Q = -2P + 5$ จะได้ $Q_{\max} = -1, Q_{\min} = -19$

5.2 ความชันให้อัตราส่วนสัมประสิทธิ์

เส้นระดับ $ax + by = k$ เมื่อ $b \neq 0$ มี

$$m = -\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{b} = -m$$

ความชันระบุอัตราส่วน แต่ไม่ระบุขนาดหรือเครื่องหมายของทั้งคู่ ต้องใช้เงื่อนไขเพิ่มก่อนเลือกตัวแทน

ตัวอย่างย่อ ถ้า $a, b > 0$ และ $m = -\frac{2}{3}$ เขียน

$a = 2u, b = 3u$ โดย $u > 0$ หาก $2x + 3y$ สูงสุด 13 บนบริเวณเดิม และ $ax + by$ สูงสุด 39 จะได้ $u = 3$ จึง $a = 6, b = 9$ กรณี $b = 0, a \neq 0$ เป็นเส้นแนวนอน ไม่ใช้สูตรความชัน

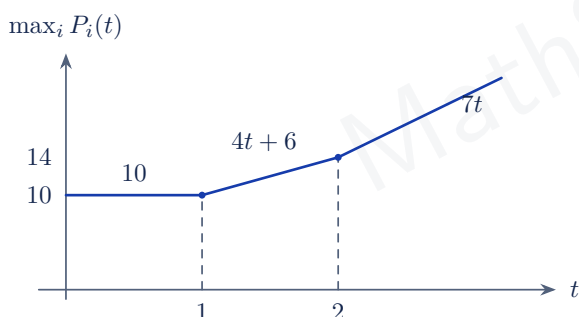
5.3 ช่วงที่จุดเดิมเหมาะสม

บนรูปหลายเหลี่ยมปิดมีขอบเขต ให้ $P_i(t)$ เป็นค่าที่จุดมุม V_i เมื่อพารามิเตอร์ t คงที่ จุด V_j ให้ค่าสูงสุดก็ต่อเมื่อ

$$P_j(t) \geq P_i(t) \quad \text{ทุก } i$$

คำตอบเดียวใช้ $>$ กับทุกจุดมุมอื่น ค่าต่ำสุดเปลี่ยนเป็น $\leq$ และ $<$ ตามลำดับ

ตัวอย่างย่อ บริเวณ $x + y \leq 7, x + 2y \leq 10, x, y \geq 0$ ให้ $P = tx + 2y$ จุดมุมมีค่า $0, 7t, 4t + 6, 10$ จุด $(4, 3)$ เหมาะสมเมื่อ $1 \leq t \leq 2$ และเป็นคำตอบเดียวเมื่อ $1 < t < 2$



5.4 ย้อนจากค่าที่เหมาะสม

เมื่อบริเวณปิดมีขอบเขตและไม่ว่าง ให้ $P_i(t)$ เป็นค่าที่จุดมุม V_i และ M เป็นค่าสูงสุดที่กำหนด

$$\max_i P_i(t) = M \iff \begin{cases} P_i(t) \leq M & \text{ทุก } i \\ P_j(t) = M & \text{บาง } j \end{cases}$$

ต้องผ่านทั้งสองส่วน ไม่แก้สมการจากจุดเดียวแล้วหยุด ค่าต่ำสุดใช้ทุกค่า $\geq M$ และมีอย่างน้อยหนึ่งค่าเท่ากับ M

ตัวอย่างย่อ บน $x + y \leq 5, x + 2y \leq 8, x, y \geq 0$ ให้ $P = tx + 2y$ สูงสุด 12 ค่าที่จุดมุมคือ $0, 5t, 2t + 6, 8$

$$5t = 12 \Rightarrow t = \frac{12}{5} \quad \text{ผ่านทุกจุด}$$

$$2t + 6 = 12 \Rightarrow t = 3 \quad \text{แต่ } 5t = 15 > 12$$

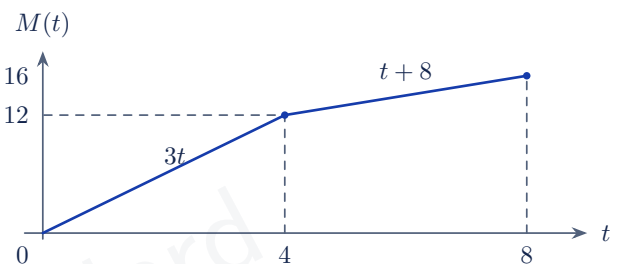
จึงมีคำตอบ $t = \frac{12}{5}$ ต้องคิดค่าที่ขัดกับจุดมุมอื่นออก

5.5 พารามิเตอร์ในข้อจำกัด

ต้องหาช่วงที่มีบริเวณเป็นไปได้ แล้วหาจุดมุมใหม่เมื่อเส้นขอบเปลี่ยน เช่น $x \geq 1, y \geq 2, x + y \leq t$ มีคำตอบก็ต่อเมื่อ $t \geq 3$ ที่ $t = 3$ เหลือจุด $(1, 2)$

ตัวอย่างย่อ ให้ $0 \leq t \leq 8$ หา $P = 3x + 4y$ สูงสุดบน $x + 2y \leq t, x + y \leq 4, x, y \geq 0$

$$M(t) = \begin{cases} 3t & 0 \leq t \leq 4 \\ t + 8 & 4 \leq t \leq 8 \end{cases}$$



ช่วงแรกเกิดที่ $(t, 0)$ ช่วงหลังเกิดที่ $(8 - t, t - 4)$ สูตรทั้งสองตรงกันที่ $t = 4$ และต้องใช้เฉพาะช่วงที่กำหนด

5.6 ประเด็นตรวจคำตอบ

- พารามิเตอร์คงที่อาจยกกำลังสองได้ หากยังเชิงเส้นในตัวแปรตัดสินใจ
- ตรวจรากหรือช่วงพารามิเตอร์กับทุกเงื่อนไขเดิม
- ถ้ามีขอบเข้ ต้องตรวจการเกิดค่าที่ดีที่สุดจริง
- แยกฟังก์ชัน และปริมาณอื่นที่ถาม พร้อมหน่วย

สรุปลำดับตรวจ: โดเมน $\rightarrow$ ข้อจำกัด $\rightarrow$ จุดมุมหรือทิศทาง $\rightarrow$ ค่าเหมาะสม $\rightarrow$ หน่วยและความหมาย