

1 เลขยกกำลัง igrณร และเงื่อนไขของนิพจน์

1.1 เลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

ให้ $a \in \mathbb{R}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เลขยกกำลังนิยามโดย

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ตัว}}$$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

สำหรับฐานศูนย์ $0^n = 0$ เมื่อ $n > 0$ ส่วน 0^0 และกำลังลบของศูนย์ไม่กำหนดค่า

1.2 สมบัติเลขยกกำลัง

ให้ $a, b > 0$ และ $m, n \in \mathbb{R}$ จะมี

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

เมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม อาจใช้ฐานลบได้ด้วย แต่ยัต้องตัดกรณีที่ตัวส่วนเป็นศูนย์หรือยกกำลังที่ไม่นิยาม

1.3 เลขชี้กำลังตรรกยะและจำนวนจริง

ให้ $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

เลขชี้กำลังจริงทั่วไปกำหนดบนฐานบวก จึงใช้สมบัติของเลขยกกำลังได้อย่างต่อเนื่อง ฐานลบต้องพิจารณานิยามเป็นรายกรณี การคูณเลขชี้กำลังอาจเปลี่ยนค่า เช่น

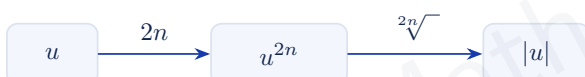
$$\sqrt{(-1)^2} = 1 \quad \text{แต่} \quad (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$$

1.4 รากอันดับคู่และรากอันดับคี่

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก รากอันดับคู่เป็นรากหลักที่ไม่เป็นลบ ส่วนรากอันดับคี่คือเครื่องหมายของจำนวนภายใน

$$\sqrt[n]{u^{2n}} = |u| \quad (u \in \mathbb{R})$$

$$\sqrt[n]{u^{2n+1}} = u \quad (u \in \mathbb{R})$$



รากอันดับคู่ของจำนวนจริงนิยามเมื่อจำนวนภายในไม่เป็นลบ ส่วนรากอันดับคี่นิยามได้ทุกจำนวนจริง

1.5 ผลคูณ ผลหาร และการใช้สังยุค

สำหรับกรณอันดับสอง ต้องระบุเงื่อนไขก่อนแยกพจน์

$$\sqrt{uv} = \sqrt{u}\sqrt{v} \quad (u, v \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \quad (u \geq 0, v > 0)$$

หาก $u, v \geq 0$ และ $u \neq v$ ใช้สังยุคได้เป็น

$$\frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} = \frac{\sqrt{u} - \sqrt{v}}{u - v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u} - \sqrt{v}} = \frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{u - v}$$

กรณี $u = v > 0$ รูปแรกยังนิยาม แต่รูปที่ใช้สังยุคข้างต้นมีตัวส่วนศูนย์ จึงต้องคำนวณโดยตรง

1.6 กรณซ้อนและกำลังสองสมบูรณ์

ให้ $u, v \geq 0$ จะมี

$$\sqrt{u + v + 2\sqrt{uv}} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$$

$$\sqrt{u + v - 2\sqrt{uv}} = |\sqrt{u} - \sqrt{v}|$$

ผลบวกที่ใช้การหักล้างได้ เช่น เมื่อ $k \geq 0$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

การแยกกรณที่ใช้กับผลคูณภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด ไม่มีกฎทั่วไปให้ $\sqrt{u+v} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$

1.7 สมการกรณและรากเกิน

ให้ $F(x), G(x)$ เป็นนิพจน์จริงที่นิยาม ณ ค่าที่พิจารณา

$$\sqrt{F(x)} = G(x) \iff \begin{cases} F(x) = G(x)^2 \\ G(x) \geq 0 \end{cases}$$

การยกกำลังสองเพียงอย่างเดียวอาจเพิ่มคำตอบ ต้องนำค่าที่ได้กลับไปตรวจในสมการเดิม

ตัวอย่างย่อ $\sqrt{x+2} = x$ ต้องมี $x \geq 0$ ยกกำลังสองได้

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ จึงได้ } x = 2, -1 \text{ เก็บเฉพาะ } x = 2$$

ตอบ $x = 2$

1.8 การแทนรากอันดับร่วม

เมื่อนิพจน์มีรากหลายอันดับ เลือกตัวแปรที่ทำให้ทุกพจน์เป็นกำลังจำนวนเต็ม เช่น

$$t = \sqrt[4]{x} \geq 0 \implies x = t^4, \sqrt{x} = t^2$$

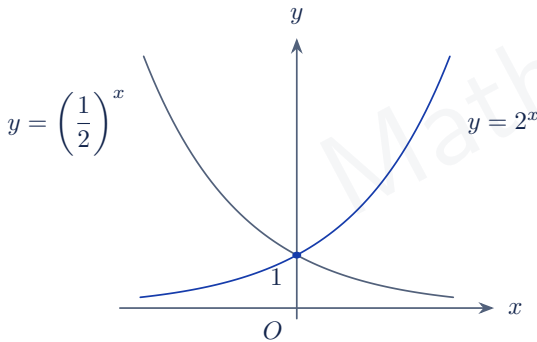
รักษาเงื่อนไขของตัวแปรใหม่ และแปลงกลับเป็นค่าของตัวแปรเดิมก่อนนับคำตอบ

2 นิยาม กราฟ และความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันผกผัน

2.1 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ให้ฐาน $a > 0$ และ $a \neq 1$ กำหนด $f(x) = a^x$

$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = (0, \infty)$$



สมบัติ	$a > 1$	$0 < a < 1$
การเปลี่ยนค่า	เพิ่มเคร่งครัด	ลดเคร่งครัด
จุดที่ผ่าน	$(0, 1), (1, a)$	$(0, 1), (1, a)$
เส้นกำกับ	$y = 0$	$y = 0$

กราฟไม่ตัดแกน x เพราะ $a^x > 0$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2.2 ฐานกับขนาดของค่าฟังก์ชัน

ให้ $0 < a < b$ เมื่อเปรียบเทียบบนเลขชี้กำลังเดียวกัน

$$x > 0 : \quad a^x < b^x$$

$$x = 0 : \quad a^x = b^x = 1$$

$$x < 0 : \quad a^x > b^x$$

สำหรับฐาน $a > 0, a \neq 1$ การเป็นหนึ่งต่อหนึ่งให้

$$a^u = a^v \iff u = v \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

2.3 ส่วนกลับและฟังก์ชันผกผัน

ให้ $a > 0, a \neq 1$ จะมี

$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$$

การเปลี่ยนฐานจาก a เป็น $\frac{1}{a}$ จึงสะท้อนกราฟผ่านแกน y
ลอการิทึมฐาน a คือฟังก์ชันผกผันที่ให้ค่าเป็นเลขชี้กำลังเดิม
จึงมีความสัมพันธ์

$$x \longrightarrow a^x \longrightarrow \log_a(a^x) = x$$

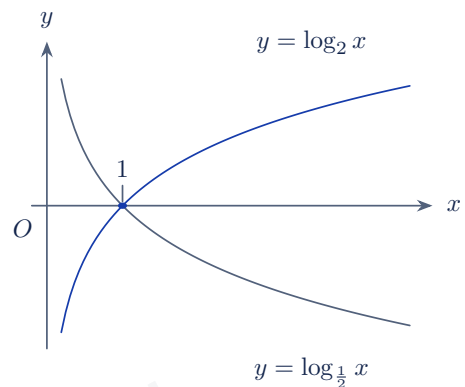
ส่วนกลับของค่า a^x คือ a^{-x} ส่วนฟังก์ชันผกผันของ a^x คือ $\log_a x$ ซึ่งมีความหมายต่างกัน

2.4 นิยามลอการิทึมและกราฟ

ให้ $a > 0, a \neq 1$ และ $x > 0$ จะมี

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

$$D_{\log_a} = (0, \infty) \quad R_{\log_a} = \mathbb{R}$$



สมบัติ	$a > 1$	$0 < a < 1$
การเปลี่ยนค่า	เพิ่มเคร่งครัด	ลดเคร่งครัด
จุดที่ผ่าน	$(1, 0), (a, 1)$	$(1, 0), (a, 1)$
เส้นกำกับ	$x = 0$	$x = 0$

จำนวนภายในลอการิทึมต้องเป็นบวก

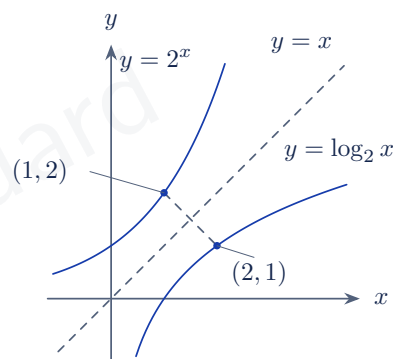
2.5 ฟังก์ชันผกผันและค่าพื้นฐาน

ให้ $a > 0, a \neq 1$ จะมี

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$$

$$\log_a(a^t) = t \quad (t \in \mathbb{R})$$



กราฟผกผันสะท้อนกันผ่านเส้น $y = x$

2.6 ฐานสิบและฐานธรรมชาติ

$$\log x = \log_{10} x \quad \ln x = \log_e x$$

โดย $e \approx 2.71828$ และทั้ง $\log x, \ln x$ ต้องมี $x > 0$

3 สมบัติลอการิทึม การเปลี่ยนฐาน และการแปลงกราฟ

3.1 ผลคูณ ผลหาร และกำลัง

ให้ $a > 0, a \neq 1, M, N > 0$ และ $r \in \mathbb{R}$

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a(M^r) = r \log_a M$$

ถ้า $u \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\log_a(u^{2n}) = 2n \log_a |u|$$

ไม่มีสูตรแยก $\log_a(M + N)$ เป็นผลบวกของลอการิทึม และการแยกผลคูณต้องให้แต่ละตัวประกอบเป็นบวก

3.2 การเปลี่ยนฐาน

ให้ $a, b > 0, a, b \neq 1$ และ $x > 0$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

ถ้า $c > 0$ จะมี

$$(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$$

การตัดต่อฐานต้องตรวจดูตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ โดยเฉพาะฐานที่ปรากฏในตัวส่วนลอการิทึม

3.3 กำลังในฐานและในจำนวนภายใน

ให้ $a > 0, a \neq 1, x > 0, r, s \in \mathbb{R}$ และ $r \neq 0$

$$\log_{a^r}(x^s) = \frac{s}{r} \log_a x$$

สำหรับ $M, N > 0$ และ $b > 0, b \neq 1$

$$M^{\log_b N} = N^{\log_b M}$$

แปลงทั้งสองข้างเป็นเลขยกกำลังฐานเดียวกันหรือใช้ลอการิทึมฐานเดียวกัน จะทำให้เปรียบเทียบเลขชี้กำลังได้

3.4 โดเมนของลอการิทึมประกอบ

นิพจน์ $\log_{B(x)} F(x)$ ต้องผ่านทุกเงื่อนไขพร้อมกัน

$$\begin{array}{ccc} B(x) > 0 & B(x) \neq 1 & F(x) > 0 \end{array}$$

นิพจน์ เงื่อนไขเพิ่มเติม

$$\log_a(\log_b F(x)) \quad \log_b F(x) > 0$$

$$\frac{1}{\log_a F(x)} \quad F(x) \neq 1$$

$$\sqrt{\log_a F(x)} \quad \log_a F(x) \geq 0$$

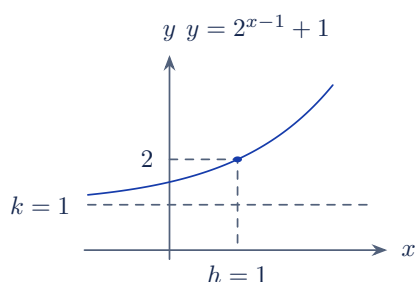
ทุกฐานเป็นบวกและไม่เท่ากับ 1 และมี $F(x) > 0$

3.5 การแปลงกราฟเอกซ์โพเนนเชียล

ให้ $a > 0, a \neq 1, b, c \neq 0$ และ $h, k \in \mathbb{R}$

$$f(x) = c a^{b(x-h)} + k \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \begin{cases} (k, \infty) & c > 0 \\ (-\infty, k) & c < 0 \end{cases}$$



- เส้นกำกับเป็น $y = k$ และกราฟผ่าน $(h, c + k)$
- ผกผันได้โดยแก้หา x และสลับตัวแปร

$$f^{-1}(x) = h + \frac{1}{b} \log_a \frac{x-k}{c}$$

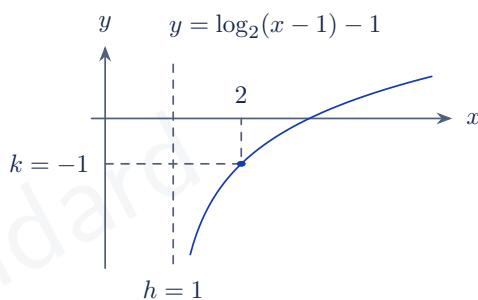
โดเมนผกผันต้องมี $\frac{x-k}{c} > 0$

3.6 การแปลงกราฟลอการิทึม

ให้ $a > 0, a \neq 1, b, c \neq 0$ และ $h, k \in \mathbb{R}$

$$g(x) = c \log_a(b(x-h)) + k$$

$$D_g = \begin{cases} (h, \infty) & b > 0 \\ (-\infty, h) & b < 0 \end{cases} \quad R_g = \mathbb{R}$$



เส้นกำกับคือ $x = h$ และกราฟผ่าน $(h + \frac{1}{b}, k)$ ผกผันมีโดเมน $\mathbb{R}$ และสูตร

$$g^{-1}(x) = h + \frac{1}{b} a^{\frac{x-k}{c}}$$

ฟังก์ชันทั้งสองกรอบเพิ่มเมื่อ $(a-1)bc > 0$ และลดเมื่อ $(a-1)bc < 0$ บนโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

4 สมการ อสมการ การแทนตัวแปร และการแยกกรณีฐาน

4.1 ลอการิทึมธรรมชาติ

ให้ $\ln x = \log_e x$ โดย $e \approx 2.71828$

$$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1 \quad \ln(e^t) = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0) \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

สูตรเปลี่ยนฐานสุดท้ายใช้เมื่อ $a > 0, a \neq 1$

4.2 สมการเอกซ์โพเนนเชียล

ให้ $a > 0, a \neq 1$ และนิพจน์เลขชี้กำลังมีนิยาม

$$a^{F(x)} = a^{G(x)} \iff F(x) = G(x)$$

ถ้าฐานต่างกัน $a, b > 0$ อาจใช้ลอการิทึมเพื่อให้

$$a^{F(x)} = b^{G(x)} \iff F(x) \ln a = G(x) \ln b$$

เมื่อตั้ง $t = a^{H(x)}$ ต้องมี $t > 0$ จากนั้นแก้สมการใน t แล้วแปลงกลับเป็น x

ตัวอย่างย่อ $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ ให้ $t = 2^x > 0$ ได้

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \text{ จึงมี } t = 1, 4 \text{ และ } 2^x = 1, 4$$

ตอบ $x = 0, 2$

4.3 สมการลอการิทึม

ให้ $a > 0, a \neq 1$ และ $c \in \mathbb{R}$

$$\log_a F(x) = c \iff F(x) = a^c$$

$$\log_a F(x) = \log_a G(x) \iff F(x) = G(x) > 0$$

- หาโดเมนจากนิพจน์เดิมก่อนรวมลอการิทึม
- เมื่อตั้ง $t = \log_a x$ จะมี $t \in \mathbb{R}$ และแปลงกลับด้วย $x = a^t > 0$

ตัวอย่างย่อ $(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x + 2 = 0$ มี $x > 0$ ให้

$$t = \log_2 x \text{ ได้ } (t-1)(t-2) = 0 \text{ จึงมี } x = 2^1, 2^2$$

ตอบ $x = 2, 4$

4.4 การรักษาด้านเงื่อนไขเดิม

- ห้ามหารพจน์ที่อาจเป็นศูนย์โดยไม่แยกกรณี
- กำจัดส่วนได้เมื่อค่าตัวส่วนไม่เป็นศูนย์
- ยกกำลังสองแล้วต้องตรวจรากเกิน
- ไม่แยก $\log_a(MN)$ เป็น $\log_a M + \log_a N$ หาก M, N อาจเป็นลบ

เช่น $\log_2(x^2) = 2 \log_2 |x|$ เมื่อ $x \neq 0$ แต่ $2 \log_2 x$ ใช้ได้

เฉพาะ $x > 0$

4.5 อสมการเมื่อฐานคงตัว

ให้ $a > 0, a \neq 1$ การเปรียบเทียบเอกซ์โพเนนเชียลเป็น

$$a^u < a^v \iff \begin{cases} u < v & a > 1 \\ u > v & 0 < a < 1 \end{cases}$$

สำหรับลอการิทึมต้องมี $U, V > 0$ ก่อน จึงใช้

$$\log_a U < \log_a V \iff \begin{cases} U < V & a > 1 \\ U > V & 0 < a < 1 \end{cases}$$

เมื่อใช้ $\leq, >, \geq$ หลักการกลับทิศทางเมื่อ $0 < a < 1$ ยังคงเดิม

ตัวอย่างย่อ $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq -1$ ต้องมี $x > 1$ ฐานน้อยกว่า 1

$$\text{จึงได้ } x-1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

ตอบ $1 < x \leq 3$



4.6 ฐานที่เป็นตัวแปร

ให้ $B(x) > 0, B(x) \neq 1$ และจำนวนภายในลอการิทึมเป็นบวก แบ่งโดเมนเป็นสองส่วน



- $B(x) > 1$: คงทิศทางเมื่อเปรียบเทียบจำนวนภายใน
 - $0 < B(x) < 1$: กลับทิศทางเมื่อเปรียบเทียบจำนวนภายใน
- นำคำตอบแต่ละกรณีตัดกับเงื่อนไขของกรณีนั้นและโดเมนเดิม แล้วรวมเซตคำตอบ

ตัวอย่างย่อ $\log_{x-1}(x+1) > 1$ มีโดเมน $x > 1, x \neq 2$

ช่วงของ x เงื่อนไขหลังเปรียบเทียบ

$$1 < x < 2 \quad x+1 < x-1 \text{ เป็นไปไม่ได้}$$

$$x > 2 \quad x+1 > x-1 \text{ เป็นจริงทุกค่า}$$

ตอบ $x > 2$

5 ลอการิทึมสามัญ ฐานธรรมชาติ และแบบจำลองการเปลี่ยนแปลง

5.1 ลอการิทึมสามัญและสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

ให้ $N > 0$ เขียน $N = m \times 10^k$ โดย $1 \leq m < 10$ และ $k \in \mathbb{Z}$ จะมี

$$\log N = k + \log m \quad 0 \leq \log m < 1$$

ค่า ลอการิทึมฐานสิบโดยประมาณ

2	0.30103
3	0.47712
5	0.69897
7	0.84510

ค่าลอการิทึมบวกหรือลบขึ้นอยู่กับขนาดของ N

$$N > 1 : \log N > 0 \quad 0 < N < 1 : \log N < 0$$

5.2 จำนวนหลักของจำนวนเต็มบวก

ให้ N เป็นจำนวนเต็มบวกและมี d หลัก จะมี

$$10^{d-1} \leq N < 10^d$$

$$d = [\log N] + 1$$

โดย $[y]$ คือจำนวนเต็มที่ยกที่สุดซึ่งไม่เกิน y

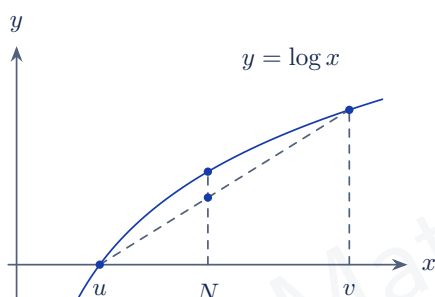
ตัวอย่างย่อ 2^{20} มี $\log(2^{20}) = 20 \log 2 \approx 6.0206$ จึงมี $[6.0206] + 1 = 7$ หลัก

หากค่าใกล้เคียงจำนวนเต็มมาก ต้องใช้ความละเอียดเพียงพอก่อนหาฟังก์ชันพื้น เพื่อไม่ให้จำนวนหลักคลาดเคลื่อน

5.3 การประมาณระหว่างค่าตาราง

ให้ $0 < u \leq N \leq v$ และ $u < v$ ประมาณด้วยเส้นตรงผ่านจุด $(u, \log u), (v, \log v)$ ได้เป็น

$$\log N \approx \log u + \frac{N - u}{v - u} (\log v - \log u)$$



เป็นการประมาณเชิงเส้น ไม่ใช่เอกลักษณ์ของลอการิทึม ช่วงที่กว้างขึ้นอาจให้ความคลาดเคลื่อนมากขึ้น

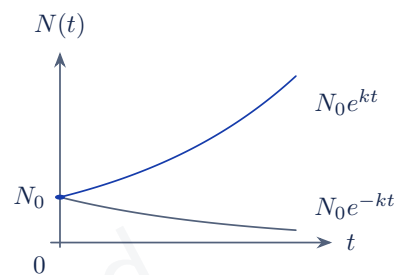
5.4 การเปลี่ยนแปลงเป็นรอบและต่อเนื่อง

ให้ $N_0 > 0$ เป็นปริมาณเริ่มต้น และ $t \geq 0$ เป็นเวลา

$$N(t) = N_0(1 + r)^t \quad r > -1$$

โดย r เป็นอัตราต่อรอบ และ t วัดเป็นจำนวนรอบ เมื่อ $r > 0$ ปริมาณเพิ่ม เมื่อ $-1 < r < 0$ ปริมาณลด แบบจำลองต่อเนื่องใช้ค่าคงตัว k ต่อหน่วยเวลา

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$



- $k > 0$ ปริมาณเพิ่ม และ $k < 0$ ปริมาณลด
- $k = 0$ ปริมาณคงที่เท่ากับ N_0

ในภาพเปรียบเทียบอัตราคงตัวขนาดเดียวกัน โดยกำหนด $k > 0$ สำหรับเส้น $N_0 e^{kt}$ และ $N_0 e^{-kt}$

5.5 เวลาเพิ่มเป็นสองเท่าและครึ่งชีวิต

สำหรับ $N(t) = N_0 e^{kt}$ โดย $N_0 > 0$ จะมี

$$T_2 = \frac{\ln 2}{k} \quad (k > 0)$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{|k|} \quad (k < 0)$$

ถ้าต้องการเวลาเมื่อปริมาณเป็น $N > 0$ และ $k \neq 0$

$$t = \frac{\ln \left(\frac{N}{N_0} \right)}{k}$$

หน่วยเวลาดังกล่าวสอดคล้องกับ k และต้องมี $t \geq 0$ ตามแบบจำลอง

5.6 ดอกเบี้ยทบต้นและอัตราส่วนการเปลี่ยนแปลง

ให้ $P > 0$ เป็นเงินต้น r เป็นอัตราดอกเบี้ยทศนิยมต่อปี m เป็นจำนวนครั้งที่ทบต้นต่อปี และ $t \geq 0$ เป็นจำนวนปี

$$A = P \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt}$$

โดย m เป็นจำนวนเต็มบวก $mt \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $1 + \frac{r}{m} > 0$ และ A เป็นเงินรวมเมื่อครบ mt งวด ถ้า $N(t) = N_0 q^t$ และ $N_0, q > 0$ จะมี

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = q$$

เอกซ์โพเนนเชียลมีอัตราส่วนคงตัว ส่วนเชิงเส้นมีผลต่างคงตัว