

สรุปเนื้อหา เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

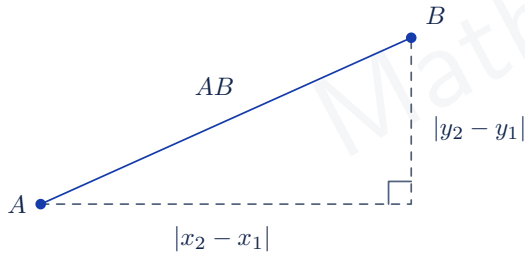
1 พิกัด ระยะทาง พื้นที่ และเส้นตรง

1.1 ระยะทางและจุดกึ่งกลาง

ให้ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบพิกัด

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



ภาพฉายของ $P(x, y)$ บนแกน x คือ $(x, 0)$ ระยะจากแกน x เท่ากับ $|y|$ และระยะจากแกน y เท่ากับ $|x|$

1.2 จุดแบ่งส่วนของเส้นตรงและเซนทรอยด์

ให้ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ เป็นจุดต่างกัน และ $m, n > 0$ ถ้า

$AP : PB = m : n$ จุดแบ่งภายในคือ

$$P = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \right)$$

จุดแบ่งภายนอกเมื่อ $m \neq n$ คือ

$$P = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n} \right)$$

เซนทรอยด์ G ของสามเหลี่ยม ABC มีพิกัด

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

ถ้า M เป็นจุดกึ่งกลาง BC จะได้ $AG : GM = 2 : 1$

1.3 พื้นที่จากพิกัดและความยาวด้าน

เรียงจุดยอด $P_i(x_i, y_i)$ ของรูปหลายเหลี่ยมตามขอบรูปที่ไม่ตัดกันเอง และให้ $P_{n+1} = P_1$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) \right|$$

สูตรเชอกรองเท้า: คูณทแยงลง ลบคูณทแยงขึ้น แล้วหารสอง และใช้ค่าสัมบูรณ์ สำหรับสามเหลี่ยม ใช้

$a = BC, b = CA, c = AB$ และ $s = \frac{a + b + c}{2}$ สูตรเฮรอน ให้

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

สามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกันก็ต่อเมื่อพื้นที่จากพิกัดเป็นศูนย์

1.4 ความชันและสมการเส้นตรง

เส้นผ่าน $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$ มีความชัน

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad m = \tan \theta$$

โดย θ เป็นมุมเอียงของเส้นตรงกับแกน x บวก

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad y = mx + b$$

รูปทั่วไป $Ax + By + C = 0$ ต้องมี $(A, B) \neq (0, 0)$ เส้นตั้งคือ $x = x_0$ และไม่มีความชันเป็นจำนวนจริง

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad ab \neq 0$$

รูปตัดแกนมีจุดตัด $(a, 0), (0, b)$ และพื้นที่สามเหลี่ยมกับแกนทั้งสองเท่ากับ $\frac{|ab|}{2}$

1.5 เส้นขนาน เส้นตั้งฉาก และมุมระหว่างเส้น

ให้ $\ell_i : A_i x + B_i y + C_i = 0$ เป็นเส้นตรง

$$\text{ขนานหรือซ้อนทับ: } A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

$$\text{ตั้งฉาก: } A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

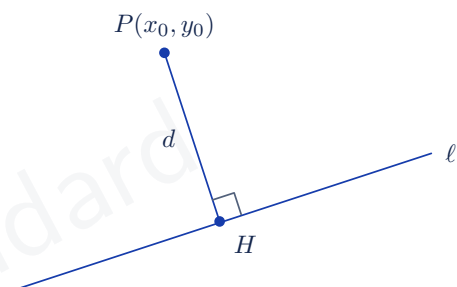
เมื่อความชันทั้งสองนิยาม ขนานใช้ $m_1 = m_2$ และตั้งฉากใช้ $m_1 m_2 = -1$ มุมขนาดเล็ก $\phi \in [0, 90^\circ]$ ระหว่างเส้นมี

$$\cos \phi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

1.6 ระยะตั้งฉากและจุดตั้งฉาก

ให้ $P(x_0, y_0)$ และ $\ell : Ax + By + C = 0$

$$d(P, \ell) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



จุด H บน ℓ ที่ทำให้ $PH \perp \ell$ หาได้จาก

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \quad H = (x_0 - At, y_0 - Bt)$$

เส้นขนานต้องปรับสัมประสิทธิ์ให้เป็น $Ax + By + C_i = 0$

ด้วย A, B เดียวกันก่อน จึงใช้

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

เส้นตั้งฉากแบ่งครึ่ง AB ผ่านจุดกึ่งกลางและตั้งฉากกับ AB ทุกจุดบนเส้นนี้ห่างจาก A, B เท่ากัน

สรุปเนื้อหา เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

2 วงกลม คอร์ด เส้นสัมผัส และการจัดรูปสมการ

2.1 สมการวงกลมและการเติมกำลังสอง

วงกลมศูนย์กลาง $C(h, k)$ รัศมี $r > 0$ มีสมการ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

เมื่อสมการเป็น $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ จะมี

$$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \quad r^2 = \frac{D^2 + E^2}{4} - F$$

- $r^2 > 0$ เป็นวงกลมจริง
 - $r^2 = 0$ เหลือจุดเดียว และ $r^2 < 0$ ไม่มีจุดจริง
- การเติมกำลังสองให้หลักทั่วไป

$$x^2 + Dx = \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \frac{D^2}{4}$$

ตัวอย่างย่อ $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ จัดเป็น
 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ จึงมีศูนย์กลาง $(2, -3)$ และรัศมี 5

2.2 วงกลมเมื่อทราบปลายเส้นผ่านศูนย์กลาง

ให้ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ เป็นปลายเส้นผ่านศูนย์กลาง

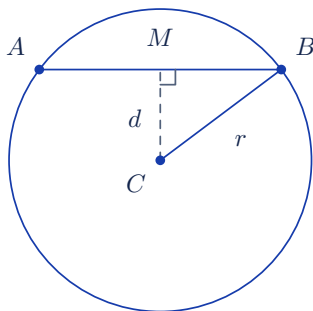
$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad r = \frac{AB}{2}$$

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

ใช้ได้เมื่อ $A \neq B$ มุมที่จุดบนวงกลมรองรับเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นมุมฉาก

2.3 คอร์ดและระยะจากศูนย์กลาง

ให้ C เป็นศูนย์กลาง AB เป็นคอร์ด M เป็นจุดกึ่งกลางคอร์ด และ $CM = d$ เส้นจากศูนย์กลางตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งคอร์ดครึ่งหนึ่ง



$$AM = MB = \sqrt{r^2 - d^2} \quad AB = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

โดย $0 \leq d < r$ และ r คือรัศมีวงกลม

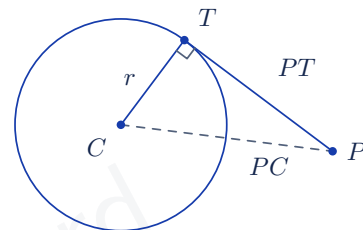
2.4 เส้นตรงตัดวงกลมและเส้นสัมผัส

ให้ d เป็นระยะจากศูนย์กลางถึงเส้นตรง และ r เป็นรัศมี

เงื่อนไข	จุดร่วม	ความสัมพันธ์
$d < r$	2 จุด	ตัดวงกลม
$d = r$	1 จุด	สัมผัสวงกลม
$d > r$	ไม่มี	อยู่นอกวงกลม

ถ้า $T(x_0, y_0)$ อยู่บนวงกลมศูนย์กลาง (h, k) รัศมี r เส้นสัมผัสที่ T มีสมการ

$$(x_0 - h)(x - h) + (y_0 - k)(y - k) = r^2$$



ให้ P เป็นจุดภายนอกและ PT เป็นเส้นสัมผัส จะมี
 $CT \perp PT$ และ

$$PT = \sqrt{PC^2 - r^2} \quad PC > r$$

เส้นสัมผัสสองเส้นที่ลากจากจุดภายนอกเดียวกันยาวเท่ากัน

2.5 จุดร่วมของสองวงกลม

ให้ $C_i(x, y) = 0$ เป็นสมการวงกลมที่มีสัมประสิทธิ์ของ x^2, y^2 เท่ากับ 1 เมื่อลบสมการจะได้เส้นตรงผ่านจุดร่วมทั้งสอง ถ้ามี

$$C_1(x, y) - C_2(x, y) = 0$$

แทนสมการเส้นตรงกลับในวงกลมเพื่อหาจุดร่วมจริง วงกลมศูนย์กลางเดียวกันต่างรัศมีไม่มีจุดร่วม ส่วนวงกลมเดียวกันมีจุดร่วมอนันต์ จึงต้องแยกกรณี

2.6 จำแนกรูปหลังจัดกำลังสองสมบูรณ์

สำหรับสมการที่ไม่มีพจน์ xy ให้ย้ายข้างและจัดรูปก่อน โดย
 $X = x - h, Y = y - k$ และ $a, b > 0$

รูปมาตรฐาน	ชนิดของกราฟ
$X^2 + Y^2 = r^2 > 0$	วงกลม
$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$	วงรี
$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$	ไฮเพอร์โบลา
$X^2 = 4pY, p \neq 0$	พาราโบลา

ต้องตรวจกรณีเสื่อมสภาพด้วย เช่น จุด เส้นตรงคู่ หรือไม่มีจุดจริง

สรุปเนื้อหา เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

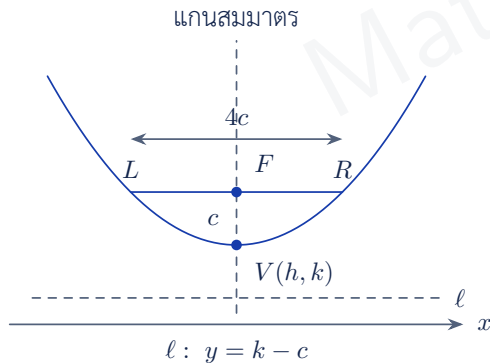
3 พาราโบลา โฟกัส เส้นไทดเรกตริกซ์ และเส้นสัมผัส

3.1 นิยามและองค์ประกอบของพาราโบลา

พาราโบลาคือเซตจุด P ที่ห่างจากโฟกัส F เท่ากับระยะตั้งฉากจาก P ถึงเส้นไทดเรกตริกซ์ ℓ โดย F ไม่อยู่บน ℓ

$$PF = d(P, \ell)$$

ให้ $V(h, k)$ เป็นจุดยอด และ $c = VF > 0$ แกนสมมาตรผ่าน V, F และตั้งฉากกับ ℓ



- จุดยอดอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสกับเส้นไทดเรกตริกซ์
- ระยะจากโฟกัสถึงเส้นไทดเรกตริกซ์เท่ากับ $2c$
- ลาดัสเรกตัมคือคอร์ดผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกนสมมาตรยาว $4c$

3.2 รูปมาตรฐานเมื่อเปิดขึ้นหรือเปิดลง

กำหนด $X = x - h, Y = y - k$ และ $c > 0$

	เปิดขึ้น	เปิดลง
สมการ	$X^2 = 4cY$	$X^2 = -4cY$
โฟกัส	$(h, k + c)$	$(h, k - c)$
ไทดเรกตริกซ์	$y = k - c$	$y = k + c$
แกนสมมาตร	$x = h$	$x = h$

เมื่อเขียน $y = A(x - h)^2 + k$ โดย $A \neq 0$

$$c = \frac{1}{4|A|}$$

$A > 0$ เปิดขึ้น และ $A < 0$ เปิดลง จุดปลายลาดัสเรกตัมมีพิกัด $x = h - 2c, h + 2c$ และมีพิกัด y เท่ากับของโฟกัส

3.3 จากขนาดรูปไปสู่สมการ

ถ้าพาราโบลาเปิดขึ้น มีจุดยอดที่กำหนด และจุดขอบ (w, d) โดย $w, d > 0$ จะมี

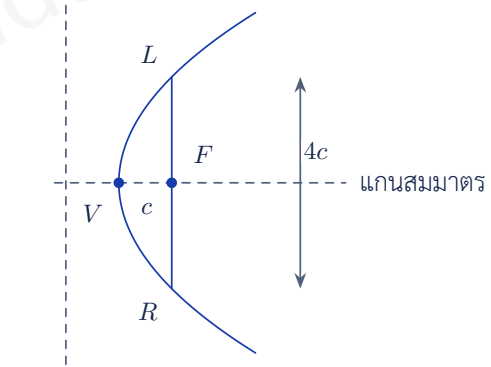
$$w^2 = 4cd \quad c = \frac{w^2}{4d}$$

โดย w เป็นครึ่งหนึ่งของความกว้างที่ระดับสูง d วัดจากจุดยอด

3.4 รูปมาตรฐานเมื่อเปิดขวาหรือเปิดซ้าย

กำหนด $X = x - h, Y = y - k$ และ $c > 0$

$$\ell: x = h - c$$



	เปิดขวา	เปิดซ้าย
สมการ	$Y^2 = 4cX$	$Y^2 = -4cX$
โฟกัส	$(h + c, k)$	$(h - c, k)$
ไทดเรกตริกซ์	$x = h - c$	$x = h + c$
แกนสมมาตร	$y = k$	$y = k$

เมื่อเขียน $x = A(y - k)^2 + h$ โดย $A \neq 0$ ใช้ $c = \frac{1}{4|A|}$ เช่นกัน เครื่องหมาย A กำหนดทิศเปิด จุดปลายลาดัสเรกตัมมีพิกัด $y = k - 2c, k + 2c$ และมีพิกัด x เท่ากับของโฟกัส

3.5 ใช้พารามิเตอร์มีเครื่องหมายและหาเส้นสัมผัส

ให้ $X = x - h, Y = y - k$ โดย (h, k) เป็นจุดยอด และ $p \neq 0$ เป็นจำนวนจริงที่มีเครื่องหมาย ต่างจาก $c = |p| > 0$ ที่เป็นระยะทาง

$$X^2 = 4pY \implies F(h, k + p)$$

ไทดเรกตริกซ์คือ $y = k - p$ และ p บวกเปิดขึ้น p ลบเปิดลง ให้ $T(x_0, y_0)$ อยู่บนกราฟ และ $X_0 = x_0 - h, Y_0 = y_0 - k$ เส้นสัมผัสที่ T คือ

$$XX_0 = 2p(Y + Y_0)$$

ถ้าพาราโบลาเป็น $Y^2 = 4pX$ ให้สลับบทบาทของ X, Y จึงได้เส้นสัมผัส

$$YY_0 = 2p(X + X_0)$$

วิธีดิสคริมีแนนต์เป็นศูนย์ใช้เมื่อแทนเส้นตรงแล้วได้สมการกำลังสองจริง การมีจุดร่วมเดียวกับเส้นขนานแกนสมมาตรไม่ยืนยันว่าเป็นเส้นสัมผัส

4 วงรี แกนเอก แกนโท โฟกัส และความเยื้องศูนย์กลาง

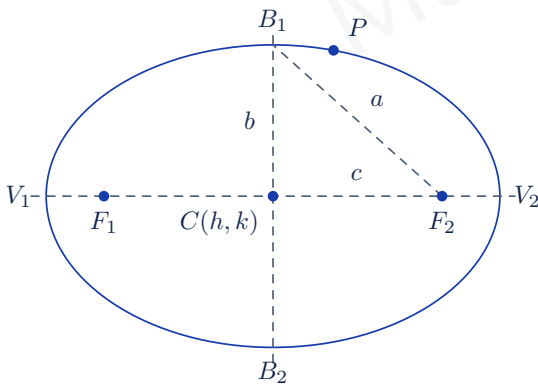
4.1 นิยามและความสัมพันธ์ของระยะ

วงรีคือเซตจุด P ที่ผลบวกระยะถึงโฟกัส F_1, F_2 เป็นค่าคงตัว $2a$ มากกว่าระยะระหว่างโฟกัส

$$PF_1 + PF_2 = 2a \quad a > b > 0$$

ให้ $C(h, k)$ เป็นศูนย์กลาง a เป็นกึ่งแกนเอก b เป็นกึ่งแกนโท และ c เป็นระยะศูนย์กลางถึงโฟกัส

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad 0 < c < a$$



ในภาพแกนเอกเป็นแนวนอน จุด V_1, V_2 เป็นปลายแกนเอก และ B_1, B_2 เป็นปลายแกนโท

4.2 รูปมาตรฐานทั้งสองทิศ

ให้ $X = x - h, Y = y - k$ และ $a > b > 0$

$$\text{แกนเอกแนวนอน: } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{แกนเอกแนวตั้ง: } \frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$$

	แนวนอน	แนวตั้ง
โฟกัส	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
ปลายแกนเอก	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
ปลายแกนโท	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$

เครื่องหมาย $\pm$ ในพิกัดระบุจุดสองจุด ตัวส่วนที่ใหญ่กว่าคือ a^2 และอยู่ใต้ตัวแปรตามแนวแกนเอก

4.3 แบบจำลองครึ่งวงรี

วงรีศูนย์กลาง (h, k) กึ่งแกนแนวนอน $a > 0$ และกึ่งแกนแนวตั้ง $b > 0$ มีครึ่งบนและครึ่งล่างตามลำดับ

$$y = k + b\sqrt{1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}}$$

$$y = k - b\sqrt{1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}}$$

ทั้งสองรูปมีโดเมน $[h - a, h + a]$ เลือกเครื่องหมายให้ตรงกับตำแหน่งเหนือหรือใต้เส้น $y = k$

4.4 ความยาว พื้นที่ และความเยื้องศูนย์กลาง

ให้ a, b, c เป็นระยะตามนิยามวงรี โดย $c^2 = a^2 - b^2$

$$\text{แกนเอก} = 2a \quad \text{แกนโท} = 2b$$

$$e = \frac{c}{a} \quad 0 < e < 1 \quad \text{Area} = \pi ab$$

ลาตัสเรกตัมคือคอร์ดผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกนเอก

$$\text{ความยาวลาตัสเรกตัม} = \frac{2b^2}{a}$$

ไคเรกตริกซ์สองเส้นตั้งฉากกับแกนเอก และอยู่ห่างศูนย์กลาง $\frac{a}{e}$ ทั้งสองด้าน

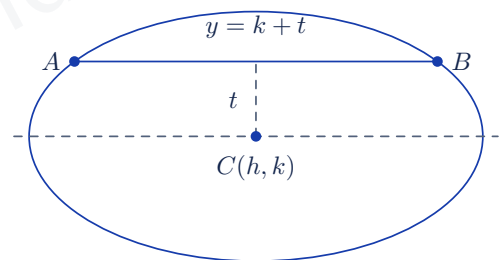
$$\text{แนวนอน: } x = h - \frac{a}{e}, \quad x = h + \frac{a}{e}$$

$$\text{แนวตั้ง: } y = k - \frac{a}{e}, \quad y = k + \frac{a}{e}$$

เมื่อ $a = b$ จะเป็นวงกลม ไม่ใช้ไคเรกตริกซ์ข้างต้นเพราะ $e = 0$

4.5 คอร์ดขนานแกนเอก

วงรีแกนเอกแนวนอนมี $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ให้คอร์ดอยู่บน $y = k + t$ โดย $|t| < b$



$$x = h \pm a\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}}$$

$$\text{ความยาวคอร์ด} = 2a\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}}$$

ถ้าคอร์ดผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกนเอก ให้แทน $x = h \pm c$ ในสมการ จะได้ครึ่งคอร์ด $\frac{b^2}{a}$

4.6 ระยะถึงโฟกัสและพื้นที่สามเหลี่ยม

ถ้า P อยู่บนวงรีและทราบ PF_1 ใช้

$$PF_2 = 2a - PF_1$$

ให้ d เป็นระยะตั้งฉากจาก P ถึงเส้นผ่านโฟกัส ฐาน

$$F_1F_2 = 2c \text{ จึงมี}$$

$$\text{Area}(\triangle F_1PF_2) = cd$$

การหาสมการจากข้อมูล เริ่มหาศูนย์กลางและแนวแกนเอก แล้วใช้ $a^2 = b^2 + c^2$ ก่อนแทนรูปมาตรฐาน

สรุปเนื้อหา เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

5 ไฮเพอร์โบลา เส้นกำกับ และการเลือกสมการจากข้อมูล

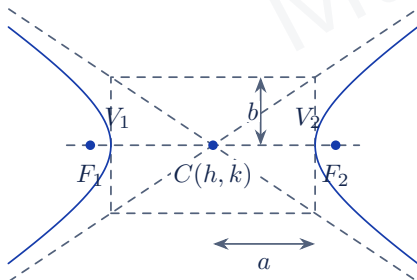
5.1 นิยามและไฮเพอร์โบลาแนวนอน

ไฮเพอร์โบลาคือเซตจุด P ที่ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระยะถึงโฟกัส F_1, F_2 เท่ากับ $2a$ โดย $0 < 2a < F_1F_2$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \quad c^2 = a^2 + b^2$$

ให้ $C(h, k)$ เป็นศูนย์กลาง $a, b > 0$ และ c เป็นระยะจากศูนย์กลางถึงโฟกัส ไม่จำเป็นต้องมี $a > b$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



จุดยอด $(h \pm a, k)$ โฟกัส $(h \pm c, k)$

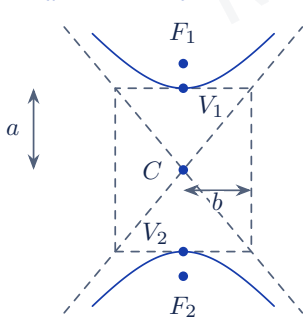
เส้นกำกับผ่านศูนย์กลางและมุมของสี่เหลี่ยมช่วยสร้างกราฟ

$$y - k = \frac{b}{a}(x - h) \quad y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$$

5.2 ไฮเพอร์โบลาแนวตั้ง

ใช้ $a, b > 0$ และ $c^2 = a^2 + b^2$ เช่นเดิม

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



จุดยอด $(h, k \pm a)$ โฟกัส $(h, k \pm c)$

$$y - k = \frac{a}{b}(x - h) \quad y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$$

เมื่อข้างขวาเป็น 1 พจน์กำลังสองที่เป็นบวกบอกแนวเปิดของกราฟ ต้องจัดเครื่องหมายให้ถูกต้องก่อนอ่านแกน

5.3 ความเยื้องศูนย์กลางและไดเรกทริกซ์

ให้ a เป็นระยะศูนย์กลางถึงจุดยอด c เป็นระยะถึงโฟกัส และ $b^2 = c^2 - a^2$

$$e = \frac{c}{a} > 1 \quad \text{ลาตัสเรกตัมยาว} \quad \frac{2b^2}{a}$$

ไดเรกทริกซ์ตั้งฉากกับแนวเปิดและห่างจากศูนย์กลาง $\frac{a}{e}$ สองด้าน

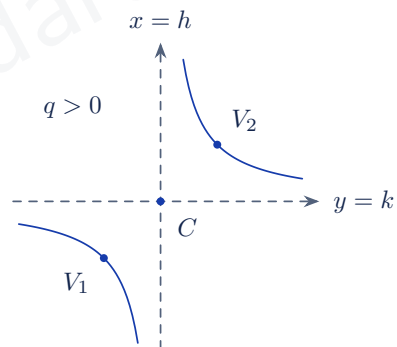
$$\text{แนวนอน: } x = h - \frac{a}{e}, \quad x = h + \frac{a}{e}$$

$$\text{แนวตั้ง: } y = k - \frac{a}{e}, \quad y = k + \frac{a}{e}$$

ไฮเพอร์โบลามุมฉากมีเส้นกำกับตั้งฉากกัน ในรูปมาตรฐานที่แกนไม่หมุนจะมี $a = b$

5.4 ผลคูณพิกัดและเส้นกำกับตั้งฉาก

สมการ $(x-h)(y-k) = q$ เมื่อ $q \neq 0$ เป็นไฮเพอร์โบลา มุมฉาก ศูนย์กลาง (h, k) เส้นกำกับคือ $x = h$ และ $y = k$



$$a = \sqrt{2|q|} \quad c = 2\sqrt{|q|} \quad e = \sqrt{2}$$

ในภาพ V_1, V_2 เป็นจุดยอด เมื่อ $q > 0$ พิกัดเทียบศูนย์กลางมีเครื่องหมายเดียวกัน ส่วน $q < 0$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน

5.5 ขั้นตอนเลือกสมการและตรวจคำตอบ

- ระบุแนวแกนและความหมายของระยะในรูปก่อนใช้ a, b, c
- แทนจุดที่โจทย์กำหนดลงในสมการ และตรวจเงื่อนไขระยะเป็นบวก

ถ้าหาจุดร่วมแล้วมีเพียง $(x-h)^2, (y-k)^2$ อาจตั้ง

$U = (x-h)^2, V = (y-k)^2$ แก้ระบบโดยต้องมี $U, V \geq 0$ จากนั้นคืนค่า

$$x = h \pm \sqrt{U} \quad y = k \pm \sqrt{V}$$

ตรวจทุกเครื่องหมายกับสมการเดิม หากมีหลายรูปในโจทย์เดียวกัน ควรแยกดัชนีของ a, b, c เช่น a_E, a_H เพื่อไม่ใช้ค่าปะปนกัน