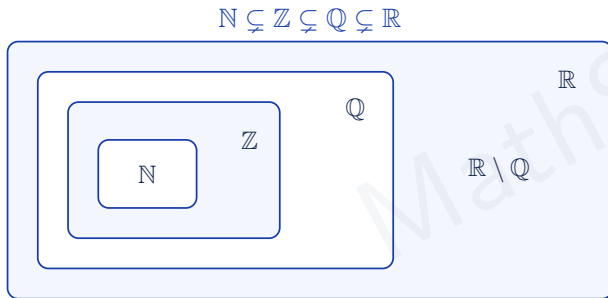


## 1 ระบบจำนวนจริง ทศนิยม และสมบัติการดำเนินการ

### 1.1 ระบบจำนวนจริง

ใช้  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  และให้  $Z, Q, R$  แทนเซตจำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนจริง ตามลำดับ



$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

จำนวนอตรรกยะคือสมาชิกของ  $R \setminus Q$  เขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มไม่ได้

**ตัวอย่างย่อ**  $\sqrt{9} = 3 \in N$  แต่  $\sqrt{3} \in R \setminus Q$  จึงต้องลดรูปก่อนจำแนกประเภท

### 1.2 ทศนิยมกับเศษส่วนอย่างต่ำ

ทศนิยมสิ้นสุดและทศนิยมซ้ำเป็นคาบเป็นจำนวนตรรกยะ ส่วนทศนิยมไม่สิ้นสุดและไม่ซ้ำเป็นคาบเป็นจำนวนอตรรกยะ

| ลักษณะ        | ตัวอย่าง                                         |
|---------------|--------------------------------------------------|
| ทศนิยมสิ้นสุด | $0.375 = \frac{3}{8}$                            |
| ทศนิยมซ้ำ     | $0.\overline{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ |
| ทศนิยมอตรรกยะ | $\sqrt{2} = 1.414213\dots$                       |

เศษส่วนอย่างต่ำ  $\frac{p}{q}$  ที่  $q > 0$  มีทศนิยมสิ้นสุดก็ต่อเมื่อ  $q = 2^u 5^v$  ( $u, v \in Z_{\geq 0}$ )

### 1.3 แปลงทศนิยมซ้ำเป็นเศษส่วน

สำหรับทศนิยมไม่ลบ ให้มีเลขไม่ซ้ำหลังจุด  $m$  หลัก และช่วงซ้ำ  $n$  หลัก กำหนด  $A$  เป็นจำนวนเต็มที่มีเลขก่อนจุด เลขไม่ซ้ำ และช่วงซ้ำหนึ่งชุด ส่วน  $B$  ตัดช่วงซ้ำนั้นออก

$$x = \frac{A - B}{10^m(10^n - 1)} \quad m \geq 0, n \geq 1$$

**ตัวอย่างย่อ**  $x = 0.12\overline{3}$  มี  $m = 1, n = 2$  จึงได้  $x = \frac{123 - 12}{10(100 - 1)} = \frac{11}{495}$

จำนวนลบแปลงค่าสัมบูรณ์ก่อน แล้วเติมเครื่องหมายลบ

### 1.4 สมบัติของการบวกและการคูณ

ให้  $a, b, c \in R$  ผลบวก ผลต่าง และผลคูณอยู่ใน  $R$  ส่วนผลหารต้องมีตัวหารไม่เป็นศูนย์

$$a + b = b + a \quad ab = ba$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (ab)c = a(bc)$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

|                  | การบวก | การคูณ                     |
|------------------|--------|----------------------------|
| เอกลักษณ์        | 0      | 1                          |
| อินเวอร์สของ $a$ | $-a$   | $\frac{1}{a} \ (a \neq 0)$ |

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ หรือ } b = 0$$

จาก  $ac = bc$  ตัด  $c$  แล้วสรุป  $a = b$  ได้เมื่อ  $c \neq 0$  เท่านั้น

### 1.5 สมบัติของอันดับและส่วนกลับ

$$a < b \implies a + c < b + c$$

$$a < b, c > 0 \implies ac < bc$$

$$a < b, c < 0 \implies ac > bc$$

เมื่อ  $a, b$  ไม่เป็นศูนย์และมีเครื่องหมายเดียวกัน

$$a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

คูณหรือหารอสมการด้วยจำนวนลบ ต้องกลับเครื่องหมาย ถ้าเป็นนิพจน์ที่ยังไม่ทราบเครื่องหมาย ต้องแบ่งกรณีก่อน

### 1.6 ตรรกยะและอตรรกยะเมื่อดำเนินการ

ให้  $r \in Q$  และ  $s$  เป็นจำนวนอตรรกยะ

$$r + s \notin Q \quad rs \notin Q \ (r \neq 0)$$

ผลบวกหรือผลคูณของอตรรกยะสองจำนวนอาจเป็นตรรกยะหรืออตรรกยะ ต้องพิจารณาค่าจริง

**ตัวอย่างย่อ**  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$  แต่  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

### 1.7 การดำเนินการที่นิยามใหม่บนเซต $S$

สำหรับ  $a, b, c \in S$  ตรวจสอบนิยามของ  $\star$

- ปิด:  $a \star b \in S$  ทุกคู่
- สลับที่:  $a \star b = b \star a$  ทุกคู่
- เปลี่ยนหมู่:  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

$$a \star e = e \star a = a \quad \text{ทุก } a \in S$$

$e \in S$  คือเอกลักษณ์ อินเวอร์ส  $b \in S$  ของ  $a$  ต้องทำให้  $a \star b = b \star a = e$

## 2 กรณฑ์ โดเมน สังยุค และเอกลักษณ์พีชคณิต

### 2.1 รากอันดับคู่และรากอันดับคี่

ให้  $m \in \mathbb{N}$  รากอันดับคี่มีนิยามในจำนวนจริงเมื่อค่าภายในไม่เป็นลบ และเลือกรากที่ไม่เป็นลบ

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \sqrt[2m]{x^{2m}} = |x|$$

รากอันดับคี่มีนิยามสำหรับจำนวนจริงทุกค่า และมีเครื่องหมายเดียวกับจำนวนภายในราก

$$\sqrt[2m+1]{x^{2m+1}} = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

**ตัวอย่างย่อ** ถ้า  $x < 3$  จะได้  $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$  ส่วน  $\sqrt[3]{-125} = -5$

### 2.2 การแยกและรวมกรณฑ์

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

- แยกตัวประกอบกำลังสองสมบูรณ์ เช่น  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- รวมได้เฉพาะพจน์ที่มีกรณฑ์เหมือนกัน เช่น

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

โดยทั่วไป  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  และต้องตรวจว่ารากแต่ละตัวมีนิยามก่อนแยกผลคูณ

### 2.3 โดเมนและค่าต้องห้าม

ให้  $f(x), g(x)$  เป็นนิพจน์ที่มีนิยามอยู่แล้ว เงื่อนไขเพิ่มเติมของรูปต่อไปนี้คือ

| นิพจน์                  | เงื่อนไข      |
|-------------------------|---------------|
| $\sqrt{f(x)}$           | $f(x) \geq 0$ |
| $\frac{1}{g(x)}$        | $g(x) \neq 0$ |
| $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ | $f(x) > 0$    |

ใช้เงื่อนไขทั้งหมดร่วมกัน และคงค่าต้องห้ามของตัวส่วนเดิมไว้ แม้จะตัดตัวประกอบได้ภายหลัง

**ตัวอย่างย่อ**  $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$  เฉพาะเมื่อ  $x \neq 1$

### 2.4 สังยุคและการกำจัดกรณฑ์ในตัวส่วน

$$(u+v)(u-v) = u^2 - v^2$$

สังยุคของ  $u+v$  คือ  $u-v$  คูณเศษและส่วนด้วยสังยุคเดียวกัน ที่ไม่เป็นศูนย์

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

สูตรนี้ใช้เมื่อ  $a, b \geq 0$  และ  $a \neq b$

### 2.5 ผลบวกและผลต่างกำลังสอง

ให้  $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

ผลบวก  $a^2 + b^2$  ไม่เท่ากับ  $(a+b)^2$  โดยทั่วไป เพราะยังมีพจน์  $2ab$

### 2.6 กำลังสามและการจัดกลุ่มพจน์

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

การแยกตัวประกอบอาจเริ่มจากดึงตัวประกอบร่วม แล้วใช้เอกลักษณ์หรือจัดกลุ่มพจน์

**ตัวอย่างย่อ**  $ax + ay + bx + by = (a+b)(x+y)$

### 2.7 กรณฑ์ซ้อน

ให้  $u, v \geq 0$  จะได้

$$\sqrt{u+v+2\sqrt{uv}} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$$

$$\sqrt{u+v-2\sqrt{uv}} = |\sqrt{u} - \sqrt{v}|$$

สำหรับ  $\sqrt{A+2\sqrt{B}}$  ให้หา  $u, v \geq 0$  ที่ทำให้  $u+v = A$  และ  $uv = B$

**ตัวอย่างย่อ**  $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 2$  เพราะ  $5+4=9$  และ  $5 \cdot 4 = 20$

เครื่องหมายลบต้องใช้ค่าสัมบูรณ์ หรือเปรียบเทียบ  $u, v$  ก่อนเลือกลำดับการลบ

### 2.8 ผลบวกกำลังของจำนวนกับส่วนกลับ

กำหนด  $t = a + \frac{1}{a}$  เมื่อ  $a \in \mathbb{R}$  และ  $a \neq 0$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = t^2 - 2$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = t^3 - 3t$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = (t^2 - 2)^2 - 2$$

ใช้การขยายกำลังและ  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$  จึงหาผลบวกกำลังได้โดยไม่ต้องแก้หา  $a$

## 3 พหุนาม เศษเหลือ และสมการพหุนาม

### 3.1 พหุนามตัวแปรเดียว

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

กำหนด  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$  และ  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  เรียก  $n$  ว่าดีกรี และ  $a_n$  ว่าสัมประสิทธิ์นำ ส่วนพหุนามศูนย์ไม่กำหนดดีกรี

$$P(0) = a_0 \quad P(1) = \sum_{i=0}^n a_i$$

$$\text{ผลบวกสัมประสิทธิ์กำลังคู่} = \frac{P(1) + P(-1)}{2}$$

$$\text{ผลบวกสัมประสิทธิ์กำลังคี่} = \frac{P(1) - P(-1)}{2}$$

พหุนามสองรูปที่เท่ากันทุกค่า  $x$  มีสัมประสิทธิ์ของกำลังเดียวกันเท่ากัน

### 3.2 การหารและทฤษฎีบทเศษเหลือ

ให้  $D(x) \neq 0$  เป็นพหุนามตัวหาร จะเขียนได้ว่า

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$Q$  คือผลหาร  $R$  คือเศษ โดย  $R = 0$  หรือ  $\deg R < \deg D$

ตัวหาร                      เศษเหลือ

$$\begin{array}{cc} x - a & P(a) \\ kx - b \ (k \neq 0) & P\left(\frac{b}{k}\right) \end{array}$$

$$x - a \text{ เป็นตัวประกอบ} \iff P(a) = 0$$

ถ้าตัวหารดีกรีสอง เศษมีรูป  $ux + v$  เมื่อทราบรากต่างกันสองค่าของตัวหาร ใช้แทนค่าเพื่อหา  $u, v$  ได้ ถ้าตัวหารไม่มีรากจริง ยังหาเศษได้ด้วยการหารพหุนามตามปกติ

### 3.3 รากตรรกยะและการกำหนดพหุนาม

ถ้า  $P$  มีสัมประสิทธิ์จำนวนเต็ม โดย  $a_n, a_0 \neq 0$  และมีราก  $\frac{p}{q}$  อย่างต่ำ เมื่อ  $q > 0$  จะต้องเป็น

$$p \mid a_0 \quad q \mid a_n$$

เครื่องหมาย | หมายถึงหารลงตัว เงื่อนไขนี้ใช้สร้างค่าที่ควรทดลอง มีได้รับรองว่าทุกค่าจะเป็นราก

- ถ้า  $a_0 = 0$  ให้ดึงตัวประกอบ  $x$  ออกก่อน
- พหุนามดีกรีไม่เกิน  $n$  ถูกกำหนดได้เพียงรูปเดียวเมื่อทราบค่าที่จุดต่างกัน  $n + 1$  จุด

### 3.4 สมการกำลังสองและจำนวนรากจริง

ให้  $ax^2 + bx + c = 0$  โดย  $a \neq 0$  และกำหนด

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

สูตรให้รากจริงเมื่อ  $\Delta \geq 0$

เงื่อนไข      รากจริงที่แตกต่างกัน

$\Delta > 0$       สองค่า

$\Delta = 0$       หนึ่งค่า

$\Delta < 0$       ไม่มี

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

### 3.5 ความสัมพันธ์ของรากกับสัมประสิทธิ์

ถ้า  $\alpha, \beta$  เป็นรากจริงของสมการกำลังสองข้างต้น โดยนับรากซ้ำตามกำลังของตัวประกอบ

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad T = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2T$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3ST$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{T} \quad (T \neq 0)$$

สมการกำลังสองที่มีราก  $\alpha, \beta$  เขียนได้เป็น  $x^2 - Sx + T = 0$

### 3.6 การลดดีกรีและตรวจราก

- ผลคูณเป็นศูนย์: แยกแต่ละตัวประกอบเท่ากับศูนย์
- แทน  $t = x^2$  ต้องมี  $t \geq 0$  โดย  $t > 0$  ให้  $x = \pm\sqrt{t}$  ส่วน  $t = 0$  ให้  $x = 0$  ค่าเดียว
- ยกกำลังสองหรือกำจัดตัวส่วนแล้ว ต้องตรวจคำตอบกับสมการและโดเมนเดิม

สมการที่มีพารามิเตอร์ต้องแยกกรณีสัมประสิทธิ์นำเป็นศูนย์ก่อนใช้สูตรกำลังสอง

### 3.7 ตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อย

ให้  $P, Q$  เป็นพหุนามไม่เป็นศูนย์ แยกตัวประกอบแล้วเลือกกำลังตามเกณฑ์

- $\gcd(P, Q)$ : ตัวประกอบร่วม กำลังน้อยที่สุด
  - $\text{lcm}(P, Q)$ : ทุกตัวประกอบ กำลังมากที่สุด
- เลือกสัมประสิทธิ์นำเป็น 1 และมีความสัมพันธ์

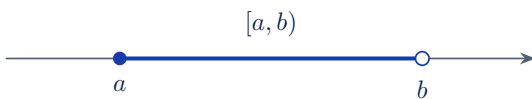
$$\deg \gcd(P, Q) + \deg \text{lcm}(P, Q) = \deg P + \deg Q$$

## 4 ช่วง อสมการ โดเมน และขอบเขต

### 4.1 สัญกรณ์ช่วงบนเส้นจำนวน

ให้  $a < b$  วงเล็บเหลี่ยมรวมปลายช่วง ส่วนวงเล็บโค้งไม่รวมปลายช่วง

| เงื่อนไข          | ช่วง           |
|-------------------|----------------|
| $a < x < b$       | $(a, b)$       |
| $a \leq x \leq b$ | $[a, b]$       |
| $a \leq x < b$    | $[a, b)$       |
| $x \leq a$        | $(-\infty, a]$ |
| $x > a$           | $(a, \infty)$  |



จุดที่บวมค่าปลาย จุดโปร่งไม่รวมค่า ส่วน  $\pm\infty$  ใช้วงเล็บโค้งเสมอ

เงื่อนไข “และ” ใช้ส่วนร่วม  $\cap$  ส่วน “หรือ” ใช้ยูเนียน  $\cup$

### 4.2 อสมการพหุนามและเศษส่วน

- ระบุโดเมน ย้ายข้างให้ข้างหนึ่งเป็นศูนย์ แล้วแยกตัวประกอบ
- เรียงศูนย์ของตัวเศษและตัวส่วนเป็นจุดวิกฤต แล้วตรวจเครื่องหมายทุกช่วง
- ผ่านตัวประกอบกำลังคู่ เครื่องหมายเปลี่ยน ผ่านกำลังคี่ เครื่องหมายไม่เปลี่ยน
- รากของตัวเศษรวมได้เมื่อมีเครื่องหมายเท่ากับ ส่วนศูนย์ของตัวส่วนห้ามรวม

**ตัวอย่างย่อ** ให้  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}$  พิจารณา  $f(x) \leq 0$

| $x$    | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 2)$ | $2$ | $(2, \infty)$ |
|--------|-----------------|------|-----------|-----|---------------|
| $f(x)$ | $-$             | $*$  | $+$       | $0$ | $+$           |

\* หมายถึงไม่มีนิยาม

$$\text{เซตคำตอบ} = (-\infty, -1) \cup \{2\}$$

รากกำลังคู่  $x = 2$  เป็นคำตอบโดดเดี่ยว แม้ช่วงรอบข้างมีเครื่องหมายบวก

### 4.3 การนับจำนวนเต็มในช่วงปิด

ให้  $a \leq b$ ,  $L = [a]$  และ  $H = [b]$  โดย  $[a]$  คือจำนวนเต็ม น้อยที่สุดที่ไม่น้อยกว่า  $a$  และ  $[b]$  คือจำนวนเต็มมากที่สุดที่ไม่เกิน  $b$

$$N = \max(0, H - L + 1)$$

ถ้า  $N > 0$  ผลบวกจำนวนเต็มในช่วงเท่ากับ

$$\frac{N(L+H)}{2}$$

### 4.4 อสมการที่มีกรณฑ์

ให้  $f = f(x)$ ,  $g = g(x)$  เป็นนิพจน์จำนวนจริงที่มีนิยาม กำหนดเงื่อนไขทั้งสามพร้อมกัน

$$\sqrt{f} \leq g \iff f \geq 0, g \geq 0, f \leq g^2$$

$$\sqrt{f} < g \iff f \geq 0, g > 0, f < g^2$$

สมการกรณฑ์ใช้หลักเดียวกัน

$$\sqrt{f} = g \iff f \geq 0, g \geq 0, f = g^2$$

ห้ามยกกำลังสองสองข้างโดยไม่ตรวจเครื่องหมายของข้างขวา เพราะอาจได้คำตอบเกิน

### 4.5 สมการที่ดัดกรีดลง

เมื่อสัมประสิทธิ์ของ  $x^2$  เป็นศูนย์ ให้พิจารณาสมการ

$Bx + C = 0$  โดย  $B, C \in \mathbb{R}$

| เงื่อนไข          | คำตอบใน $\mathbb{R}$ |
|-------------------|----------------------|
| $B \neq 0$        | $x = -\frac{C}{B}$   |
| $B = 0, C = 0$    | ทุกจำนวนจริง         |
| $B = 0, C \neq 0$ | ไม่มีคำตอบ           |

### 4.6 ขอบเขต ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด

ให้  $S \subseteq \mathbb{R}$  ไม่ว่างและมีขอบเขตทั้งสองด้าน

- $\sup S$ : ขอบเขตบนที่น้อยที่สุด
- $\inf S$ : ขอบเขตล่างที่มากที่สุด
- $\max S, \min S$ : ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ต้องเป็นสมาชิกของ  $S$  จริง

**ตัวอย่างย่อ** ถ้า  $S = (1, 4]$  จะมี  $\inf S = 1$ ,

$\sup S = \max S = 4$  แต่ไม่มี  $\min S$

ถ้า  $f$  มีค่าสูงสุด  $M$  แล้ว  $f(x) < k$  ทุกค่า ต้องมี  $k > M$  แต่

ถ้า  $M$  เป็นเพียงขอบเขตบนที่ไม่ถูกบรรลุ อาจใช้  $k = M$  ได้

### 4.7 ช่วงค่าของนิพจน์

- กำลังสอง: ตรวจว่าช่วงของ  $x$  มีศูนย์อยู่ด้วยหรือไม่ ก่อนหาช่วงของ  $x^2$
- กำลังสองทั่วไป: จัดรูปกำลังสองสมบูรณ์ แล้วตรวจจุดยอดและปลายช่วง

สำหรับ  $y = ax^2 + bx + c$  ให้  $a \neq 0$  และ  $\Delta = b^2 - 4ac$

จุดยอดมีพิกัด

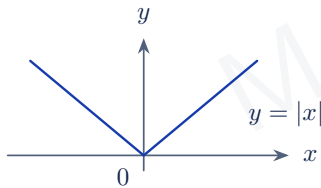
$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

## 5 คำสัมบูรณ์ ระยะห่าง และการประยุกต์

### 5.1 นิยามและสมบัติของค่าสัมบูรณ์

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

เมื่อ  $x, c \in \mathbb{R}$  ค่าสัมบูรณ์  $|x|$  คือระยะจาก  $x$  ถึงศูนย์ ส่วน  $|x - c|$  คือระยะจาก  $x$  ถึง  $c$



$$|ab| = |a||b| \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \iff x = 0$$

### 5.2 สมการค่าสัมบูรณ์

ให้  $f = f(x), g = g(x)$  มีนิยามในจำนวนจริง

$$|f| = g \iff g \geq 0 \text{ และ } (f = g \text{ หรือ } f = -g)$$

$$|f| = |g| \iff f = g \text{ หรือ } f = -g$$

- แบ่งกรณีตามเครื่องหมายของนิพจน์ภายใน แล้วตรวจสอบช่วงที่ใช้ทุกครั้ง
- ค่าสัมบูรณ์ซ้อน: แยกจากชั้นนอก และตัดกรณีที่ข้างขวาเป็นลบ
- แทน  $t = |f(x)|$  ต้องมี  $t \geq 0$  และ  $f(x)^2 = t^2$

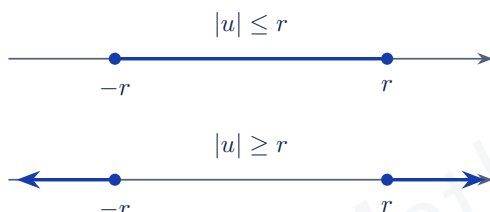
### 5.3 อสมการค่าสัมบูรณ์กับค่าคงที่

ให้  $u \in \mathbb{R}$  และ  $r > 0$  จะได้

$$|u| < r \iff -r < u < r$$

$$|u| > r \iff u < -r \text{ หรือ } u > r$$

เปลี่ยนเป็น  $\leq, \geq$  โดยรวมปลายช่วงตามลำดับ



ถ้า  $r = 0$  หรือ  $r < 0$  ให้ตรวจสอบจาก  $|u| \geq 0$  โดยตรง ไม่ใช้สูตรที่กำหนด  $r > 0$

### 5.4 ข้างขวามีตัวแปร

ให้  $f = f(x), g = g(x)$  เป็นนิพจน์จำนวนจริงที่มีนิยาม

$$|f| < g \iff g > 0 \text{ และ } -g < f < g$$

$$|f| \leq g \iff g \geq 0 \text{ และ } -g \leq f \leq g$$

$$|f| > |g| \iff f^2 > g^2$$

$$|f| \leq |g| \iff f^2 \leq g^2$$

การเปรียบเทียบค่าสัมบูรณ์ทั้งสองข้างยกกำลังสองได้ เพราะทั้งสองข้างไม่เป็นลบ

### 5.5 จุดกึ่งกลางช่วงและค่ากลางเคลื่อน

ให้  $a < b$  กำหนดจุดกึ่งกลาง  $c = \frac{a+b}{2}$  และครึ่งความยาวช่วง  $r = \frac{b-a}{2}$

$$a \leq x \leq b \iff |x - c| \leq r$$

**ตัวอย่างย่อ**  $3 \leq x \leq 9 \iff |x - 6| \leq 3$

ช่วงเปิดใช้เครื่องหมาย  $<$  ส่วนปลายเปิดและปิดต่างกันต้องระบุแยกตามเงื่อนไขเดิม

### 5.6 อสมการสามเหลี่ยมและระยะห่างรวม

ให้  $a, b \in \mathbb{R}$

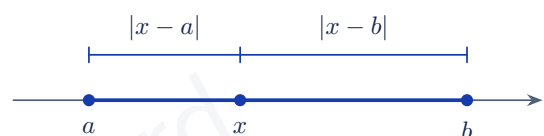
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

เท่ากันก็ต่อเมื่อ  $ab \geq 0$  และมีอสมการย้อนกลับ

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

ถ้า  $a < b$  ระยะห่างจาก  $x$  ถึงปลายทั้งสองมีผลรวม

$$|x - a| + |x - b| \geq b - a$$



เท่ากันก็ต่อเมื่อ  $a \leq x \leq b$  หาก  $x$  อยู่นอกช่วง ผลรวมระยะห่างจะมากกว่าความยาวช่วง

### 5.7 ผลบวกหลายค่าสัมบูรณ์

ให้  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  และ  $n \in \mathbb{N}$

- เรียงจุดที่นิพจน์ภายในเป็นศูนย์ แล้วแบ่งเส้นจำนวนเป็นช่วงเพื่อถอดค่าสัมบูรณ์

- สำหรับ  $\sum_{i=1}^n |x - a_i|$  ค่าต่ำสุดเกิดที่มัธยฐานของ

$$a_1, \dots, a_n$$

เมื่อ  $n$  เป็นคู่ ทุกค่าในช่วงระหว่างข้อมูลกลางสองค่าทำให้ผลรวมต่ำสุด กรณีมีน้ำหนักรวมไม่เท่ากันต้องวิเคราะห์เพิ่มเติม