

1 หลักการนับ การเลือก และการจัดเรียง

1.1 การกำหนดผลลัพธ์และหลักการนับ

ก่อนนับให้ระบุว่ามีลำดับมีผลหรือไม่ ใช้ซ้ำได้หรือไม่ และสิ่งที่เหมือนกันแยกแยะได้หรือไม่

ลักษณะการทำงาน	จำนวนวิธี
ทำต่อเนื่อง k ชั้น	$n_1 n_2 \cdots n_k$
แยกเป็นกรณีไม่ทับกัน	$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

n_i คือจำนวนทางเลือกของชั้นหรือกรณีที่ i หลักการคูณใช้เมื่อจำนวนทางเลือกแต่ละชั้นเป็นไปตามที่กำหนด หากชั้นกับทางเลือกก่อนหน้า ต้องแยกกรณีให้ถูกต้อง

$$n(E) = n(S) - n(E')$$

S คือเซตผลลัพธ์ทั้งหมด E คือเงื่อนไขที่ต้องการ E' คือกรณีที่ไม่น่าสนใจ และ n หมายถึงจำนวนสมาชิก

1.2 แฟกทอเรียล เรียงสับเปลี่ยน และจัดหมู่

ให้ n, r เป็นจำนวนเต็ม โดย $0 \leq r \leq n$

$$n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \quad (n \geq 1), \quad 0! = 1$$

เลือก r จากของต่างกัน n ชั้น	ลำดับ	จำนวนวิธี
เรียงสับเปลี่ยน	มีผล	$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
จัดหมู่	ไม่มีผล	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$P_{n,r} = \binom{n}{r} r!$$

ตัวอย่างย่อ เลือกกรรมการ 2 คนจาก 5 คนได้ $\binom{5}{2} = 10$ วิธี แต่เลือกประธานและรองประธานได้ $P_{5,2} = 20$ วิธี

1.3 การสร้างจำนวน สับเซต และตัวหาร

จำนวนหลายหลักห้ามมีศูนย์นำหน้า ควรจัดหลักที่มีข้อจำกัดก่อน เช่น หลักหน่วยของจำนวนคู่

- รหัสอาจเริ่มด้วยศูนย์ได้ หากกติกาอนุญาต จึงต้องแยกรหัสออกจากจำนวนหลายหลัก
- เซตที่มีสมาชิก n ตัว มีสับเซต 2^n เซต และสับเซตขนาด r มี $\binom{n}{r}$ เซต

ถ้า $N = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ โดย p_i เป็นจำนวนเฉพาะต่างกัน และ a_i เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{จำนวนตัวหารบวกของ } N = \prod_{i=1}^k (a_i + 1)$$

แต่ละตัวหารเลือกเลขชี้กำลังของ p_i ได้จาก $0, 1, \dots, a_i$ อย่างอิสระ

1.4 การเรียงสิ่งของที่มีชนิดซ้ำ

สิ่งของรวม n ชิ้น แบ่งเป็นชนิดที่เหมือนกันภายในชนิด จำนวน $n_1, \dots, n_k$ ชิ้น โดย $\sum n_i = n$

$$\text{จำนวนเรียงต่างกัน} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$$

ตัวอย่างย่อ เรียงอักษร A, A, B, B, C ได้ $\frac{5!}{2!2!} = 30$ แบบ หากสิ่งของแต่ละชิ้นมีหมายเลขต่างกัน แม้เป็นสีเดียวกันก็ไม่ใช้การหารซ้ำ เว้นแต่ผลลัพธ์ไม่แยกหมายเลข

1.5 สิ่งของที่ต้องอยู่ติดกัน

ของต่างกัน n ชิ้น มีของที่กำหนด k ชิ้นต้องติดกัน โดย $1 \leq k \leq n$ ให้รวมกลุ่มนั้นเป็นหนึ่งหน่วยก่อนเรียง



$$\text{จำนวนวิธี} = (n - k + 1)! k!$$

ตัวประกอบแรกเรียงหน่วยทั้งหมด ส่วน $k!$ เรียงภายในกลุ่ม ถ้าลำดับภายในถูกบังคับให้แทน $k!$ ด้วยจำนวนที่อนุญาต

1.6 สิ่งของที่ห้ามอยู่ติดกัน

เรียงของต่างกันกลุ่มฐาน m ชิ้นก่อน จะเกิด $m + 1$ ช่อง รวมช่องหัวและท้าย แล้วเลือกช่องใส่ของต่างกันอีก k ชิ้น ช่องละไม่เกินหนึ่งชิ้น



$$m! \binom{m+1}{k} k! \quad (0 \leq k \leq m+1)$$

ถ้า $k > m + 1$ ทำไม่ได้ ถ้าของที่ใส่เหมือนกันทั้งหมด ไม่คูณ $k!$

1.7 การเรียงรอบวงและการกลับด้าน

ของต่างกัน n ชิ้น เรียงรอบวงโดยการหมุนถือเป็นแบบเดียวกัน แต่ภาพสะท้อนยังต่างกัน

$$\text{รอบวง} = (n - 1)! \quad (n \geq 1)$$

ถ้ากลับด้านแล้วถือว่าเหมือนกันด้วย เช่น กำไลของต่างกัน

$$\text{จำนวนแบบ} = \frac{(n - 1)!}{2} \quad (n \geq 3)$$

ถ้ามีเก้าอี้หมายเลข การหมุนยังต่างกัน ต้องนับตามตำแหน่งที่ระบุ รอบวงมี m ช่องระหว่างของฐาน m ชิ้น ไม่ใช่ $m + 1$ ช่อง

2 การแบ่งกลุ่ม การแจก และการนับภายใต้ข้อจำกัด

2.1 แบ่งสิ่งของต่างกันเป็นกลุ่ม

ของต่างกัน N ชิ้น แบ่งเป็นกลุ่มขนาด $n_1, \dots, n_k$ โดย $\sum n_i = N$ และกลุ่มมีชื่อกำกับ

$$\text{จำนวนวิธี} = \frac{N!}{n_1! \cdots n_k!}$$

ถ้ากลุ่มไม่มีชื่อและทุกกลุ่มไม่ว่าง ให้หารจำนวนการสลับกลุ่มขนาดเดียวกันเพิ่ม เช่น กลุ่มละ $s \geq 1$ ชิ้น จำนวน k กลุ่ม

$$\text{กลุ่มไม่มีชื่อ} = \frac{(ks)!}{(s!)^k k!}$$

ของต่างกัน N ชิ้น แจกอิสระให้ผู้รับต่างกัน k คนโดยไม่จำกัดจำนวนที่ได้รับ มี k^N วิธี

2.2 ของเหมือนกัน: ดาวและขีด

แจกของเหมือนกัน N ชิ้นให้ผู้รับต่างกัน $k \geq 1$ คน เทียบกับคำตอบจำนวนเต็มของ $x_1 + \cdots + x_k = N$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline x_1 = 2 & x_2 = 3 & x_3 = 1 \end{array}$$

$$x_i \geq 0 : \binom{N+k-1}{k-1}$$

ถ้ากำหนดขั้นต่ำ $x_i \geq L_i$ ให้หักขั้นต่ำก่อน โดย L_i เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ

$$\text{จำนวนวิธี} = \binom{N - \sum L_i + k - 1}{k - 1}$$

ใช้เมื่อ $N \geq \sum L_i$ กรณีทุกคนได้อย่างน้อยหนึ่งชิ้นให้ $L_i = 1$ จึงได้ $\binom{N-1}{k-1}$ เมื่อ $N \geq k$

2.3 ขอบบนและของแต่ละชนิดมีจำกัด

แจกของเหมือนกัน N ชิ้นให้ k คน ถ้า $0 \leq x_i \leq u$ ให้ใช้หลักบวกลบรวมเพื่อตัดคำตอบที่เกินขอบบน

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{N - j(u+1) + k - 1}{k - 1}$$

ในสูตรนี้ให้ $\binom{t}{r} = 0$ เมื่อ $t < r$ หรือ $t < 0$ และ $r \geq 0$ โดย N, u เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ **ของเหมือนกันภายในชนิด** มี k ชนิด ชนิดที่ i มี c_i ชิ้น โดย c_i เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ จำนวนวิธีเลือกทั้งหมด r ชิ้นคือสัมประสิทธิ์ของ t^r ใน

$$\prod_{i=1}^k (1 + t + \cdots + t^{c_i})$$

แต่ละทางเลือกเลขชี้กำลังแทนจำนวนที่เลือกจากชนิดนั้น ไม่คูณด้วยจำนวนการเรียง

2.4 ความสัมพันธ์และฟังก์ชันบนเซตจำกัด

ให้ $|A| = a \geq 1, |B| = b \geq 1$ โดย a, b เป็นจำนวนเต็ม

สิ่งที่นับจาก A ไป B	จำนวน
ความสัมพันธ์ทั้งหมด	2^{ab}
ความสัมพันธ์ที่โดเมนเท่ากับ A	$(2^b - 1)^a$
ฟังก์ชันทั้งหมด	b^a
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ $a \leq b$	$P_{b,a}$

ถ้า $a > b$ ไม่มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ส่วนฟังก์ชันทั่วถึงนับโดยตัดกรณีที่มีสมาชิกของ B ไม่ถูกใช้

$$\text{ทั่วถึง} = \sum_{j=0}^b (-1)^j \binom{b}{j} (b-j)^a$$

ถ้า $a < b$ จำนวนฟังก์ชันทั่วถึงเป็นศูนย์ สูตรเดียวกันใช้แจกของต่างกัน a ชิ้นลงกล่องต่างกัน b กล่อง โดยทุกกล่องต้องมีของ

2.5 การเรียงที่ไม่มีสิ่งใดอยู่ตำแหน่งเดิม

ให้ D_n เป็นจำนวนการเรียงของต่างกัน n ชิ้นที่ไม่มีชิ้นใดอยู่ตำแหน่งเดิม

$$D_n = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 0, \quad D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

สูตรเวียนเกิดใช้เมื่อ $n \geq 2$ ถ้าต้องการให้อยู่ตำแหน่งเดิมพอดี r ชิ้น โดย $0 \leq r \leq n$

$$\text{จำนวนวิธี} = \binom{n}{r} D_{n-r}$$

เลือกชิ้นที่ตรงก่อน แล้วจัดชิ้นที่เหลือโดยไม่มีตำแหน่งเดิม

2.6 การนับรูปและการแข่งขัน

จุด $N \geq 3$ จุดที่ไม่มีสามจุดรวมเส้น ให้จำนวนสามเหลี่ยม $\binom{N}{3}$ รูป หากมี q จุดรวมเส้นเพียงกลุ่มเดียว ให้ลบ $\binom{q}{3}$



$$v = 4, h = 4$$

เลือกขอบรูป

กริดมีเส้นตั้ง v เส้นและเส้นนอน h เส้น ตัดกันครบ

$$\text{สี่เหลี่ยมผืนผ้าตามกริด} = \binom{v}{2} \binom{h}{2}$$

เลือกเส้นขอบสองเส้นในแต่ละทิศ การแข่งขัน n ทีม ทุกคู่พบกันคู่ละ s นัด มีทั้งหมด $s \binom{n}{2}$ นัด

3 ทฤษฎีบททวินาม ปริภูมิตัวอย่าง และรูปแบบการสุ่ม

3.1 การกระจายทวินามและพจน์ทั่วไป

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ และจำนวน a, b

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n \\ T_{r+1} &= \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \quad (0 \leq r \leq n)\end{aligned}$$

r เป็นดัชนีเริ่มที่ 0 แต่ลำดับพจน์เริ่มที่ 1 ถ้าเป็น $(a-b)^n$ ให้แทน b ด้วย $-b$ จึงมีเครื่องหมายสลับกัน

ตัวอย่างย่อ สัมประสิทธิ์ของ x^2 ใน $(1+2x)^4$ คือ $\binom{4}{2} 2^2 = 24$

3.2 พจน์คงตัวและผลรวมสัมประสิทธิ์

สำหรับ $(\alpha x^p + \beta x^q)^n$ เมื่อ α, β คงตัว

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} \alpha^{n-r} \beta^r x^{p(n-r)+qr}$$

ต้องการพจน์ x^m ให้แก้ $p(n-r) + qr = m$ และตรวจว่า r เป็นจำนวนเต็มในช่วง $0, \dots, n$

- พจน์คงตัวใช้ $m = 0$ หากไม่มีดัชนีที่ผ่านเงื่อนไข สัมประสิทธิ์เป็นศูนย์
- สำหรับพหุนาม $F(x)$ ผลรวมสัมประสิทธิ์คือ $F(1)$ และผลรวมสลับเครื่องหมายคือ $F(-1)$

ตัวอย่างย่อ พจน์คงตัวของ $(x^2 + x^{-1})^6$ ใช้ $12 - 3r = 0$ จึงได้ $r = 4$ และสัมประสิทธิ์ $\binom{6}{4} = 15$

3.3 เอกลักษณ์สัมประสิทธิ์ทวินาม

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} &= \binom{n}{n-r}, \quad \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n \\ \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} &= \binom{n+1}{r+1} \quad (0 \leq r < n) \\ \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} &= \frac{n-r}{r+1} \quad (0 \leq r < n) \\ \sum_{i=r}^n \binom{i}{r} &= \binom{n+1}{r+1} \quad (0 \leq r \leq n)\end{aligned}$$

ทุกดัชนีเป็นจำนวนเต็ม สูตรอัตราส่วนช่วยเปรียบเทียบพจน์ติดกันหรือหาสัมประสิทธิ์มากที่สุด

3.4 ปริภูมิตัวอย่างและความน่าจะเป็น

การทดลองสุ่มมีผลลัพธ์พื้นฐานในปริภูมิตัวอย่าง S ส่วนเหตุการณ์ E เป็นสับเซตของ S

$$0 \leq P(E) \leq 1, \quad P(S) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

$$P(E') = 1 - P(E)$$

ถ้าผลลัพธ์พื้นฐานทุกแบบมีโอกาสเท่ากัน และ S เป็นเซตจำกัดไม่ว่าง

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

หากโอกาสไม่เท่ากัน ให้รวมความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ใน E หรือใช้ผลรวมน้ำหนักที่กำหนด

ตัวอย่างย่อ ทอยลูกเต๋าเที่ยงตรงสองลูกที่แยกกันได้ ใช้คู่อันดับ (i, j) มี 36 แบบ แต่ละแบบมีโอกาส $\frac{1}{36}$ ผลรวมแต้มแต่ละค่าไม่ได้มีโอกาสเท่ากัน จึงไม่ใช่จำนวนค่าผลรวมเป็นตัวหารโดยตรง

3.5 หยิบพร้อมกัน ทีละชิ้น และใส่คืน

มีของต่างกัน $N \geq 1$ ชิ้น เลือก r ชิ้นโดยแต่ละชิ้นสุ่มอย่างเท่าเทียม และ $0 \leq r \leq N$ สำหรับกรณีไม่คืน

วิธีบันทึกผลการหยิบ	จำนวนผลลัพธ์
พร้อมกัน ไม่สนลำดับ	$\binom{N}{r}$
ทีละชิ้น ไม่คืน สนลำดับ	$P_{N,r}$
ทีละชิ้น ใส่คืน อิสระ สนลำดับ	N^r

กรณีใส่คืนเลือก $r > N$ ได้ ต้องนับเหตุการณ์และผลลัพธ์ทั้งหมดด้วยกติกาเดียวกัน

ตัวอย่างย่อ ของ 5 ชิ้น เลือก 2 ชิ้น พร้อมกันมี 10 แบบ ทีละชิ้นไม่คืนมี 20 แบบ และใส่คืนมี 25 แบบ

3.6 การเลือกตามประเภทและเงื่อนไขจำนวน

ของต่างกันมีประเภทแรก a ชิ้น ประเภทที่สอง b ชิ้น เลือกทั้งหมด r ชิ้น ให้ประเภทแรกมี j ชิ้น

$$\text{จำนวนวิธี} = \binom{a}{j} \binom{b}{r-j}$$

$$\max(0, r-b) \leq j \leq \min(a, r)$$

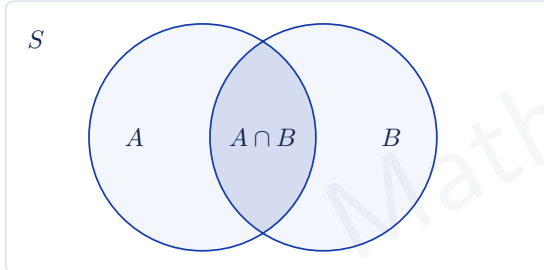
ถ้ากำหนดอย่างน้อยหรือไม่เกิน ให้บวกค่าดัชนี j ที่ผ่านทุกเงื่อนไข ผลคูณเป็นคี่ต้องเลือกแต่จำนวนคี่ ส่วนผลคูณเป็นลบต้องมีจำนวนลบเป็นจำนวนคี่และไม่มีศูนย์

สรุปเนื้อหา เรื่อง ความน่าจะเป็น

4 เหตุการณ์ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข และเบย์

4.1 ภาษาเหตุการณ์และสองเหตุการณ์

$A \cup B$ หมายถึงเกิดอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ $A \cap B$ หมายถึงเกิดทั้งสอง และ A' หมายถึงไม่เกิด A



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

สิ่งที่ต้องการ	ความน่าจะเป็น
เกิดพอดีหนึ่ง	$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
เกิดไม่เกินหนึ่ง	$1 - P(A \cap B)$
ไม่เกิดเลย	$1 - P(A \cup B)$

4.2 หลักบวกลบรวมสำหรับสามเหตุการณ์

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

บวกเหตุการณ์เดียว ลบส่วนร่วมทีละคู่ แล้วบวกส่วนร่วมทั้งสามกลับ ถ้านับจำนวนสมาชิก ใช้ n แทน P ในโครงสร้างเดียวกัน

4.3 อิสระกับไม่เกิดร่วมกัน

อิสระ การเกิดของเหตุการณ์หนึ่งไม่เปลี่ยนความน่าจะเป็นของอีกเหตุการณ์หนึ่ง ตรวจสอบด้วย

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ไม่เกิดร่วมกัน ไม่มีผลลัพธ์ที่อยู่ทั้งสองเหตุการณ์

$$A \cap B = \emptyset \implies P(A \cap B) = 0$$

สองเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันและต่างมีความน่าจะเป็นบวก จะไม่เป็นอิสระต่อกัน กรณีมากกว่าสองเหตุการณ์ การอิสระทีละคู่ยังไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าอิสระร่วมกันทั้งหมด

4.4 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

เมื่อทราบว่า A เกิดแล้ว จะพิจารณาเฉพาะส่วนของ A โดยต้องมี $P(A) > 0$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

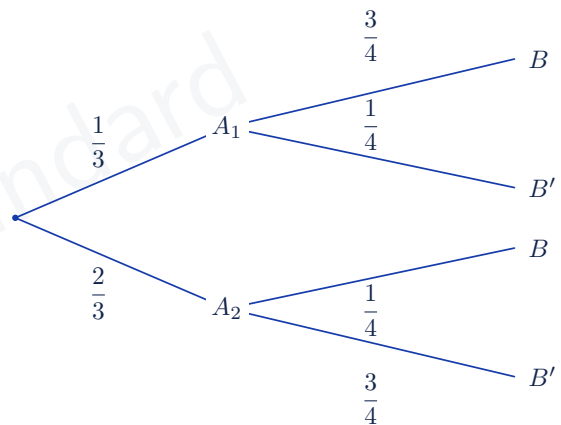
$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A)$$

ถ้าผลลัพธ์เท่าเทียม จะใช้ $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ ได้ ระวัง $P(B | A)$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $P(A | B)$

4.5 แผนภาพต้นไม้และความน่าจะเป็นรวม

ให้ $A_1, \dots, A_k$ ไม่ทับกันและแบ่งครบ S โดยทุกเหตุการณ์มีความน่าจะเป็นบวก

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(A_i)P(B | A_i)$$



คูณตามเส้นทางเพื่อหาส่วนร่วม แล้วบวกเส้นทางที่เข้าเหตุการณ์เดียวกัน ตัวอย่างในรูปให้

$$P(B) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{5}{12}$$

ผลรวมโอกาสของกิ่งที่ออกจากจุดเดียวกันต้องเท่ากับ 1

4.6 ทฤษฎีบทของเบย์

เมื่อทราบผล B แล้ว ต้องการย้อนหาว่ามาจากกรณี A_j ไດ ใช้เงื่อนไขแบ่งกรณีเช่นเดียวกับข้อก่อน และ $P(B) > 0$

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j)P(B | A_j)}{\sum_{i=1}^k P(A_i)P(B | A_i)}$$

ตัวอย่างย่อ จากแผนภาพต้นไม้

$$P(A_1 | B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$$

ตัวเลขคือโอกาสของเส้นทางที่ต้องการ ตัวส่วนคือโอกาสเกิดผล B จากทุกเส้นทาง

5 การทดลองซ้ำ การสุ่มหลายประเภท และการประยุกต์

5.1 ทดลองอิสระซ้ำและจำนวนครั้งที่สำเร็จ

ทดลองอิสระ n ครั้ง แต่ละครั้งสำเร็จด้วยโอกาสคงที่ p หรือล้มเหลวด้วยโอกาส $q = 1 - p$

$$P(\text{สำเร็จพอดี } k \text{ ครั้ง}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

ใช้เมื่อ $0 < p < 1$ และ $k = 0, \dots, n$ หาก $p = 0$ หรือ 1 ให้พิจารณาผลแน่นอนโดยตรง



เลือกตำแหน่งสำเร็จ k ตำแหน่งได้ $\binom{n}{k}$ แบบ แต่ละลำดับมีโอกาส $p^k q^{n-k}$

$$P(\text{สำเร็จอย่างน้อยหนึ่ง}) = 1 - (1 - p)^n$$

อย่างน้อย r ครั้งให้รวมตั้งแต่ $k = r$ ถึง n ไม่เกิน r ครั้งให้รวมตั้งแต่ $k = 0$ ถึง r

5.2 สุ่มไม่คืนและจำนวนที่เลือกแต่ละประเภท

ของต่างกันมีประเภทแรก a ชิ้น ประเภทที่สอง b ชิ้น สุ่ม r ชิ้น พร้อมกันอย่างเท่าเทียม

$$P(\text{ประเภทแรก } j \text{ ชิ้น}) = \frac{\binom{a}{j} \binom{b}{r-j}}{\binom{a+b}{r}}$$

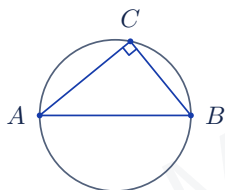
ใช้ $0 \leq r \leq a + b$ และ $\max(0, r - b) \leq j \leq \min(a, r)$ ทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่างย่อ แดง 3 ชิ้น น้ำเงิน 5 ชิ้น หยิบ 2 ชิ้น โอกาสได้แดงหนึ่งชิ้นคือ $\frac{3 \cdot 5}{28} = \frac{15}{28}$

การหยิบไม่คืนโดยทั่วไปไม่อิสระ โอกาสขึ้นถัดไปเปลี่ยนตามสิ่งที่หยิบแล้ว

5.3 การสุ่มจุดบนวงกลม

มีจุดต่างกัน $N \geq 3$ จุดบนวงกลม โดยมีจุดปลายเส้นผ่านศูนย์กลาง d คู่ สุ่มเลือกสามจุดอย่างเท่าเทียม



มุม C เป็นมุมฉากเมื่อ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$$P(\text{สามเหลี่ยมมุมฉาก}) = \frac{d(N-2)}{\binom{N}{3}}$$

เลือกเส้นผ่านศูนย์กลางและจุดที่สาม จึงได้ $d(N-2)$ รูปโดยไม่นับซ้ำ

5.4 การซ้ำของค่าที่เลือกอย่างอิสระ

คน n คนเลือกอิสระจาก m ค่าที่มีโอกาสเท่ากัน ถ้า

$1 \leq n \leq m$ จะได้

$$P(\text{ไม่ซ้ำเลย}) = \frac{P_{m,n}}{m^n}$$

$$P(\text{ซ้ำอย่างน้อยหนึ่งคู่}) = 1 - \frac{P_{m,n}}{m^n}$$

ถ้า $n > m$ ต้องมีค่าซ้ำ โอกาสซ้ำจึงเป็น 1 กรณีมีหนึ่งคู่พอดีและคนที่เหลือได้ค่าต่างกันทั้งหมด

$$P = \frac{\binom{n}{2} m P_{m-1, n-2}}{m^n} \quad (2 \leq n \leq m+1)$$

เลือกคนที่ซ้ำ เลือกค่าของคู่ แล้วเลือกค่าต่างกันให้คนที่เหลือห้ามรวมกรณีสามคนซ้ำหรือสองคู่

5.5 สุ่มเรียงและตำแหน่งเดิม

เรียงของต่างกัน n ชิ้นโดยทุกแบบมีโอกาสเท่ากัน ให้ D_j เป็นจำนวนเรียง j ชิ้นที่ไม่มีตำแหน่งเดิม

$$P(\text{อยู่ที่เดิมพอดี } k \text{ ชิ้น}) = \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!}$$

$0 \leq k \leq n$ กรณีไม่อยู่ที่เดิมเลยมีโอกาส $\frac{D_n}{n!}$ ต้องใช้ปริภูมิที่แยกสิ่งของแต่ละชิ้นได้

5.6 เกมที่หยุดตามเงื่อนไข

เขียนเฉพาะเส้นทางที่จบตามกติกา แล้วคูณโอกาสตามกิ่ง ไม่ถือว่าผลปลายทางต่างความยาวมีโอกาสเท่ากัน

ตัวอย่างย่อ โยนเหรียญเที่ยงตรง หยุดเมื่อออกหัว H ครั้งแรกหรือโยนครบ 3 ครั้ง โดย T คือก้อย

เส้นทางจบ	H	TH	TTH	TTT
โอกาส	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

โอกาสได้หัวภายในสามครั้งคือ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ ไม่ใช่ $\frac{3}{4}$ จากการนับเส้นทางเท่าเทียม

5.7 ความน่าจะเป็นของค่าสูงสุดที่เลือกได้

สุ่มเลือก r จำนวนต่างกันจาก $1, \dots, N$ โดยทุกชุดมีโอกาสเท่ากัน ต้องการให้ค่าสูงสุดเป็น t

$$P(\max = t) = \frac{\binom{t-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} \quad (1 \leq r \leq t \leq N)$$

ต้องเลือก t และเลือกอีก $r-1$ ค่าจากจำนวนที่น้อยกว่า t แนวคิดเดียวกันใช้กับค่าต่ำสุด โดยเลือกค่าที่เหลือจากด้านที่มากกว่า