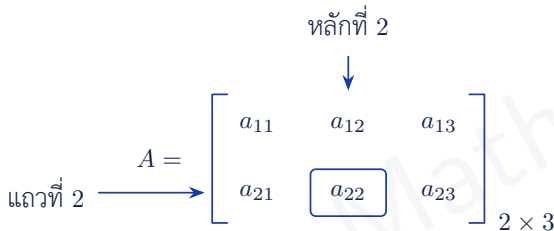


1 สมาชิก ชนิด และการดำเนินการของเมทริกซ์

1.1 มิติและตำแหน่งสมาชิก

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ มี m แถว n หลัก รวม mn สมาชิก โดย a_{ij} อยู่แถวที่ i หลักที่ j



ดัชนีตัวแรกระบุแถว ดัชนีตัวที่สองระบุหลัก
เมทริกซ์จัตุรัสมี $m = n$ และมีแนวทแยงหลักเป็น
 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

1.2 ชนิดที่ใช้บ่อย

ชนิด	ลักษณะสำคัญ
เมทริกซ์แถว	มิติ $1 \times n$
เมทริกซ์หลัก	มิติ $m \times 1$
เมทริกซ์ศูนย์ O	สมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์
เมทริกซ์ทแยงมุม	จัตุรัสและ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$
เมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n	แนวทแยงหลักเป็น 1 ที่เหลือเป็น 0
เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน	จัตุรัสและ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$
เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง	จัตุรัสและ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i < j$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 ทรานสโพสและสมมาตร

ทรานสโพส A^T เปลี่ยนแถวเป็นหลัก โดย $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ และเปลี่ยนมิติ $m \times n$ เป็น $n \times m$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส

$$\text{สมมาตร} \quad A^T = A \iff a_{ij} = a_{ji}$$

$$\text{สมมาตรเสมือน} \quad A^T = -A \iff a_{ij} = -a_{ji}$$

สมมาตรเสมือนมี $a_{ii} = 0$ ทุกตำแหน่งบนแนวทแยงหลัก

1.4 การเท่ากัน บวก ลบ และคูณสเกลาร์

$A = B$ เมื่อมิติเท่ากันและสมาชิกตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกคู่

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}], \quad kA = [ka_{ij}]$$

การบวกและลบต้องใช้เมทริกซ์มิติเดียวกัน ส่วน k เป็นจำนวนจริงที่คูณสมาชิกทุกตัว

$$A + O = A, \quad A + (-A) = O$$

$$(A^T)^T = A, \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(kA)^T = kA^T$$

ในชุดนี้ สมาชิกและสเกลาร์เป็นจำนวนจริง เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น

1.5 การคูณเมทริกซ์

$$A_{m \times r} \quad B_{r \times n} = C_{m \times n}$$

มิติด้านในเท่ากัน
มิติด้านในเท่ากัน

จำนวนหลักของตัวหน้าเท่ากับจำนวนแถวของตัวหลัง จึงคูณกันได้ ผลคูณมีมิติ $m \times n$

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj}$$

สมาชิก c_{ij} ได้จากแถวที่ i ของ A คูณสมาชิกตำแหน่งคู่กันในหลักที่ j ของ B แล้วรวมผลคูณ

$$\text{ตัวอย่างย่อ} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad c_{12} = 1(1) + 2(-1) + 0(2) = -1$$

1.6 สมบัติและข้อควรระวัง

เมื่อมิติสอดคล้องกับการดำเนินการ

$$(AB)C = A(BC), \quad A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC, \quad I_m A = A I_n = A$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

ในสูตรเอกลักษณ์ให้ A มีมิติ $m \times n$

- โดยทั่วไป $AB \neq BA$ และบางกรณี AB นิยามได้ แต่ BA นิยามไม่ได้
- $AB = O$ ไม่บังคับให้ $A = O$ หรือ $B = O$
- การตัดตัวประกอบเมทริกซ์ต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติม เช่น ตัวประกอบนั้นมีเมทริกซ์ผกผัน

2 ดีเทอร์มิแนนต์ ไมเนอร์ และโคแฟกเตอร์

2.1 ดีเทอร์มิแนนต์ขนาดสอง

ดีเทอร์มิแนนต์ $\det A$ เป็นจำนวนที่นิยามสำหรับเมทริกซ์จัตุรัส ไม่ใช่เมทริกซ์อิกตัวหนึ่ง

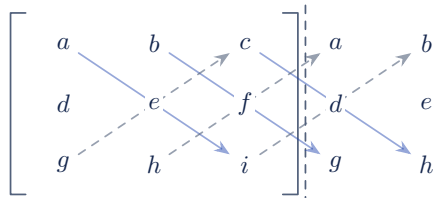
$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

ตัวอย่างย่อ $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2(4) - 1(3) = 5$

2.2 ดีเทอร์มิแนนต์ขนาดสาม

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ กฎซาร์รัสให้

$$\det A = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$



$$\begin{array}{ccc} +aei & +bfg & +cdh \\ -ceg & -bdi & -afh \end{array}$$

เขียนสองหลักแรกซ้ำทางขวา คูณลงแล้วบวก คูณขึ้นแล้วลบ กฎนี้ใช้เฉพาะขนาด 3×3

ตัวอย่างย่อ $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 12 + 4 = 16$

2.3 ไมเนอร์และโคแฟกเตอร์

ให้ A ขนาด $n \times n$ โดย $n \geq 2$

- ไมเนอร์ M_{ij} คือดีเทอร์มิแนนต์ที่เหลือเมื่อตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A
- โคแฟกเตอร์ C_{ij} คือไมเนอร์ที่คูณเครื่องหมายตามตำแหน่ง

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$[(-1)^{i+j}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างย่อ เมื่อตัดแถวที่ 1 หลักที่ 2 จาก A ในข้อ 2.2 จะได้ $M_{12} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -2$ จึงมี $C_{12} = 2$

2.4 การขยายตามแถวหรือหลัก

เลือกแถวหรือหลักใดก็ได้ โดยใช้โคแฟกเตอร์ของสมาชิกในแถวหรือหลักนั้น

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad \text{เมื่อเลือกแถว } i$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad \text{เมื่อเลือกหลัก } j$$

แถวหรือหลักที่มีศูนย์หลายตำแหน่งช่วยลดจำนวนพจน์ที่ต้องคำนวณ

2.5 การดำเนินการตามแถวกับดีเทอร์มิแนนต์

ให้ D เป็นดีเทอร์มิแนนต์เดิม และ R_i แทนแถวที่ i

การเปลี่ยนแถว	ดีเทอร์มิแนนต์ใหม่
$R_i \leftrightarrow R_j \ (i \neq j)$	$-D$
$R_i \leftarrow kR_i$	kD
$R_i \leftarrow R_i + kR_j \ (i \neq j)$	D

การดำเนินการตามหลักให้ผลในลักษณะเดียวกัน

$$\det(kA) = k^n \det A \quad (A \text{ ขนาด } n \times n)$$

คูณหนึ่งแถวด้วย k ต่างจากคูณทั้งเมทริกซ์ด้วย k

2.6 สมบัติที่ใช้ลดรูป

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาดเดียวกัน และ r เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\det A^T = \det A, \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$\det(A^r) = (\det A)^r$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน สามเหลี่ยมล่าง หรือทแยงมุม

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

ตัวอย่างย่อ $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 2(-1)(5) = -10$

กรณีดีเทอร์มิแนนต์ศูนย์และข้อจำกัด

- มีแถวศูนย์ แถวซ้ำ หรือสองแถวเป็นสัดส่วนกัน จะได้ $\det A = 0$ เช่นเดียวกับกรณีหลัก
- ถ้าแถวหนึ่งเป็นผลรวมเชิงเส้นของแถวอื่น จะได้ $\det A = 0$
- $\det A = 0$ เรียกว่าเมทริกซ์เอกฐาน และ $\det A \neq 0$ เรียกว่าเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

โดยทั่วไป $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ ดีเทอร์มิแนนต์เป็นเชิงเส้นในแถวเดียว เมื่อคงแถวอื่นทั้งหมดไว้เท่านั้น

3 เมทริกซ์ผกผัน แอดจอยน์ และสมการเมทริกซ์

3.1 นิยามและสูตรขนาดสอง

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A เมทริกซ์ผกผัน A^{-1} เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ และมีเพียงตัวเดียว

$$A^{-1} \text{ มีอยู่} \iff \det A \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

โดย $ad-bc \neq 0$ สลับ a, d และเปลี่ยนเครื่องหมาย b, c แล้วหารด้วยดีเทอร์มิแนนต์

ตัวอย่างย่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ มี $\det A = 5$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2 แอดจอยน์และผกผันขนาดทั่วไป

ให้ C_{ij} เป็นโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} เมทริกซ์แอดจอยน์ได้จากทรานสโพสเมทริกซ์โคแฟกเตอร์

$$\text{adj } A = [C_{ij}]^T$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}, \quad (A^{-1})_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det A}$$

ทั้งสองสูตรผกผันต้องมี $\det A \neq 0$ และต้องสลับดัชนีของโคแฟกเตอร์

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I$$

$$\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

สมบัติแอดจอยน์สองสูตรหลังใช้ได้แม้ A เอกฐาน

3.3 การหาผกผันด้วยเกาส์-จอร์แดน

$$[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$$

ใช้การดำเนินการพื้นฐานกับทั้งแถวของเมทริกซ์แต่งเดิม หากไม่สามารถลดฝั่งซ้ายเป็น I ได้ แสดงว่าไม่มีผกผัน

ตัวอย่างย่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ใช้ $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

3.4 สมบัติของเมทริกซ์ผกผัน

เมื่อ A, B ไม่เอกฐานขนาดเดียวกัน และ $k \neq 0$

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r \quad (r \in \mathbb{Z}_{>0})$$

ผกผันของผลคูณต้องกลับลำดับตัวประกอบ และโดยทั่วไป

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

3.5 สมการเมทริกซ์และด้านที่คูณ

คูณด้วยเมทริกซ์ผกผันด้านเดียวกับตำแหน่งของตัวประกอบที่ต้องการกำจัด โดยรักษาลำดับการคูณ

สมการ	คำตอบ
$AX = B$	$X = A^{-1}B$
$XA = B$	$X = BA^{-1}$
$AXB = C$	$X = A^{-1}CB^{-1}$

A ต้องมีผกผัน และแถวสุดท้าย B ต้องมีผกผันด้วย ทุกผลคูณต้องมีมิติสอดคล้องกัน

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

คูณด้านซ้ายทั้งสองข้างด้วย A^{-1}

- เมทริกซ์ไม่มีการหารแบบจำนวนจริง จึงไม่ใช้การเขียน $\frac{B}{A}$ แทน $A^{-1}B$ หรือ BA^{-1}
- หาก A เอกฐาน ห้ามใช้การตัด A จากสองข้างโดยไม่ีเหตุผลเพิ่มเติม

3.6 ผกผันจากสมการพหุนาม

ให้ A จัตุรัส และ p, q เป็นจำนวนจริง หาก

$$A^2 + pA + qI = O, \quad q \neq 0$$

จะได้ $A(A + pI) = -qI$ และ $(A + pI)A = -qI$ จึงมี

$$A^{-1} = -\frac{1}{q}(A + pI)$$

ตัวอย่างย่อ ถ้า $A^2 - 3A + 2I = O$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$$

พจน์ค่าคงที่ของพหุนามเมทริกซ์ต้องเขียนคูณ I เสมอ

4 ระบบสมการเชิงเส้นและการจำแนกคำตอบ

4.1 เขียนระบบสมการในรูปเมทริกซ์

ให้ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ X เป็นเมทริกซ์หลักของตัวแปร และ B เป็นเมทริกซ์หลักของค่าคงที่

$$AX = B$$

เรียงหลักของ A ให้ตรงกับลำดับตัวแปรใน X

ตัวอย่างย่อ $2x + y = 5$ และ $x - y = 1$ เขียนได้เป็น

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_B$$

ถ้า A จัตุรัสและ $\det A \neq 0$ ระบบมีคำตอบชุดเดียว

$$X = A^{-1}B, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.2 กฎคราเมอร์

สำหรับ $AX = B$ ซึ่งมี n สมการ n ตัวแปร และ $\det A \neq 0$ ให้ A_i ได้จาก A โดยแทนหลักที่ i ด้วย B

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad (i = 1, \dots, n)$$

ระบบ $ax + by = e$ และ $cx + dy = f$ มี $D = ad - bc \neq 0$

$$D_x = \det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}, \quad D_y = \det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

ตัวอย่างย่อ ระบบในข้อ 4.1 มี $D = -3$, $D_x = -6$, $D_y = -3$ จึงได้ $x = 2$ และ $y = 1$

4.3 เมทริกซ์แต่งเติมและการลดรูปตามแถว

เขียน $[A | B]$ แล้วใช้การดำเนินการพื้นฐานต่อไปนี้ โดยทำกับทุกสมาชิกในแถวนั้นรวมค่าคงที่

$$R_i \leftrightarrow R_j, \quad R_i \leftarrow kR_i \quad (k \neq 0)$$

$$R_i \leftarrow R_i + kR_j \quad (i \neq j)$$

ตัวนำคือสมาชิกตัวแรกที่ไม่นับศูนย์ของแต่ละแถวที่ไม่เป็นแถวศูนย์ ใช้ตัวนำกำจัดสมาชิกในหลักเดียวกัน

ตัวอย่างย่อ ระบบในข้อ 4.1 สลับแถว แล้วใช้

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

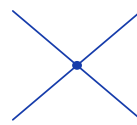
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

จากแถวล่างได้ $y = 1$ แทนกลับในแถบบนได้ $x = 2$

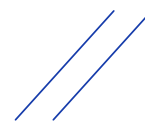
4.4 จำนวนชุดคำตอบ

หลังลดรูป $[A | B]$ พิจารณาความขัดแย้งก่อน แล้วจึงพิจารณาตัวแปรอิสระ

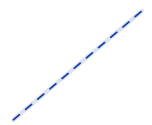
ลักษณะหลังลดรูป	คำตอบ
มีแถว $[0 \cdots 0 c]$, $c \neq 0$	ไม่มีคำตอบ
ไม่มีแถวขัดแย้ง ทุกตัวแปรเป็นตัวนำ	ชุดเดียว
ไม่มีแถวขัดแย้ง มีตัวแปรอิสระ	อนันต์ชุด



ตัดกัน
ชุดเดียว



ขนานต่างเส้น
ไม่มีคำตอบ



ทับกัน
อนันต์ชุด

ภาพแสดงระบบสองเส้นตรง ส่วนการลดรูปตามแถวใช้จำแนกคำตอบของระบบขนาดทั่วไปได้ด้วย

4.5 ระบบที่มีพารามิเตอร์

แยกค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ตัวนำเป็นศูนย์ก่อนหาร หรือก่อนใช้สูตรผกผันและกฎคราเมอร์

ตัวอย่างย่อ ให้ $x + y = 2$ และ $x + ty = b$ โดย $t, b \in \mathbb{R}$ ลบสมการแรกจากสมการที่สองได้

$$(t-1)y = b-2$$

เงื่อนไข	ข้อสรุป
$t \neq 1$	$y = \frac{b-2}{t-1}, \quad x = 2-y$
$t = 1, b = 2$	อนันต์ชุด จาก $x + y = 2$
$t = 1, b \neq 2$	ไม่มีคำตอบ

กรณี $t = 1$ ห้ามหารด้วย $t-1$ ต้องพิจารณาสมการเดิม

4.6 ระบบเอกพันธ์และข้อสรุปจากดีเทอร์มิแนนต์

ระบบเอกพันธ์คือ $AX = O$ และมีคำตอบ $X = O$ เสมอ เรียกว่าคำตอบศูนย์

- ถ้า A จัตุรัสและ $\det A \neq 0$ จะมีเพียงคำตอบศูนย์
- ถ้า A จัตุรัสและ $\det A = 0$ จะมีคำตอบที่ไม่ใช่ศูนย์ และมีคำตอบอนันต์ชุด

สำหรับระบบทั่วไป $AX = B$ เมื่อ A จัตุรัส

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \text{คำตอบชุดเดียว}$$

$$\det A = 0 \Rightarrow \text{ไม่มีคำตอบหรืออนันต์ชุด}$$

เมื่อดีเทอร์มิแนนต์ศูนย์ ต้องตรวจสอบความสอดคล้องของระบบก่อนสรุปจำนวนคำตอบ

5 กำลังของเมทริกซ์และการประยุกต์

5.1 กำลังและการกระจายพจน์

ให้ A, B จัตุรัสขนาดเดียวกัน และ r, s เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ

$$A^0 = I, \quad A^{r+s} = A^r A^s, \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

ถ้า $AB = BA$ จึงรวมพจน์กลางเป็น $2AB$ และใช้

$$(AB)^n = A^n B^n \quad \text{ได้ สำหรับจำนวนเต็มบวก } n$$

5.2 เทรซและทฤษฎีบทเคย์ลีย์-แฮมิลตัน

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix}$ และกำหนด

$$s = \text{tr } A = a + e, \quad d = \det A = ae - bc$$

$$A^2 - sA + dI = O$$

จึงลดกำลังสูงโดย $A^n = sA^{n-1} - dA^{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็ม และมี

$$\det(A + tI) = t^2 + st + d \quad (t \in \mathbb{R})$$

ถ้า $d \neq 0$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{d}(sI - A)$ และ $\text{tr}(A^{-1}) = \frac{s}{d}$ ให้ $u_n = \text{tr}(A^n)$ จะมี $u_0 = 2, u_1 = s$ และ

$$u_n = su_{n-1} - du_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

สูตรในกรอบนี้ใช้กับขนาด 2×2 โดยเฉพาะ

5.3 กำลังรูปพิเศษ

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และเมทริกซ์ทุกตัวเป็นจัตุรัส

เงื่อนไข ผลที่ได้

$$A^2 = A \quad A^n = A$$

$$A^2 = I \quad A^{2n} = I, \quad A^{2n-1} = A$$

$$N^2 = O \quad N^n = O \quad \text{เมื่อ } n \geq 2$$

ถ้า $N^2 = O$ และ $k \neq 0$ จะมี

$$(kI + N)^n = k^n I + nk^{n-1} N$$

ตัวอย่างย่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I + N$ โดย $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

และ $N^2 = O$

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

ผลคูณเมทริกซ์หลักกับเมทริกซ์แถว

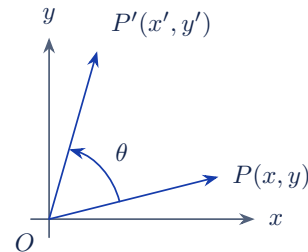
ถ้า U มิติ $m \times 1$, V มิติ $1 \times m$ ให้ $C = UV$ และ $VU = [s]$ จะได้

$$C^2 = sC, \quad C^n = s^{n-1}C \quad (n \geq 2)$$

5.4 เมทริกซ์การหมุน

หมุนจุดรอบจุดกำเนิดด้วยมุม θ โดยหมุนบวกหมุนทวนเข็มนาฬิกา ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติหลัก

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$$

$$R(\theta)^n = R(n\theta), \quad R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$$

$$\det R(\theta) = 1, \quad R(\theta)^T R(\theta) = I$$

5.5 รูปกำลังสอง

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $v = [x \ y]^T$ สมาชิกของ $v^T A v$ คือ

$$ax^2 + (b+c)xy + dy^2$$

เขียนพหุนาม $ax^2 + qxy + dy^2$ ด้วยเมทริกซ์สมมาตรได้เป็น

$$[x \ y] \begin{bmatrix} a & \frac{q}{2} \\ \frac{q}{2} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

สัมประสิทธิ์พจน์ xy คือผลบวกสมาชิกนอกแนวทแยง

5.6 การนับและความน่าจะเป็น

ถ้าเลือกสมาชิกแต่ละตำแหน่งจากเซต S ซึ่งมี q ค่า

ชนิดเมทริกซ์ จำนวนที่เลือกได้

$$m \times n \text{ เลือกซ้ำได้อิสระ} \quad q^{mn}$$

$$\text{สมมาตร } n \times n \quad q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

เมทริกซ์สมมาตรเลือกแนวทแยงและเหนือแนวทแยงได้อิสระ

2×2 เลือกไม่ซ้ำจาก q ค่า มี $q(q-1)(q-2)(q-3)$ แบบเมื่อ $q \geq 4$

สำหรับ $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ เงื่อนไขเอกฐานคือ $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Ω คือปริภูมิตัวอย่าง E คือเหตุการณ์ $n(\Omega), n(E)$ คือจำนวนผลลัพธ์ ใช้เมื่อผลลัพธ์พื้นฐานมีโอกาสเท่ากัน