

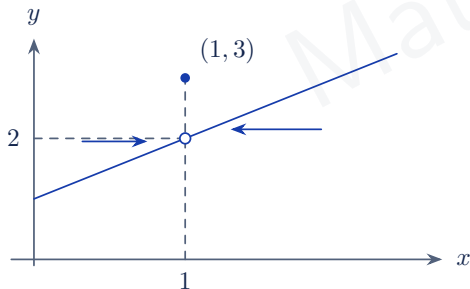
1. ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.1 ความหมายของลิมิต

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ หมายถึงค่า $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยพิจารณา $x \neq a$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

ลิมิตสองด้านเป็นจำนวนจริง L ก็ต่อเมื่อลิมิตซ้ายและขวามีค่าจำกัดและเท่ากัน



กราฟนี้มี $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ แต่ $f(1) = 3$ จุดโพร่งแสดงจุดที่ไม่รวมในกราฟ ส่วนจุดทึบแสดงค่าฟังก์ชัน ลิมิตอาจมีอยู่แม้ $f(a)$ ไม่ได้นิยาม และไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $f(a)$

1.2 กฎของลิมิต

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัว

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf \pm g) = cA \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg) = AB$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

พหุนามหาลิมิตได้โดยแทนค่า ส่วนฟังก์ชันตรรกยะใช้การแทนค่าได้เมื่อส่วนไม่เป็นศูนย์

1.3 การจัดรูปเมื่อแทนค่าได้ $\frac{0}{0}$

$\frac{0}{0}$ เป็นรูปไม่กำหนด ต้องจัดรูปก่อนสรุปลิมิต

ลักษณะ	แนวทาง
พหุนามมีตัวประกอบร่วม	แยกตัวประกอบแล้วตัด
มีผลต่างของกรณฑ์	คูณด้วยสังยุค
เศษส่วนซ้อน	รวมเป็นเศษส่วนเดียว

ตัวอย่างย่อ เมื่อ $x \neq 2$ จะมี

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2 \implies \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

ตัดเฉพาะตัวประกอบร่วม และยังคงข้อจำกัดของโดเมนเดิม

1.4 ลิมิตด้านเดียวและฟังก์ชันแบ่งช่วง

$x \rightarrow a^-$ ใช้สูตรบนด้าน $x < a$ ส่วน $x \rightarrow a^+$ ใช้สูตรบนด้าน $x > a$ ไม่ใช่ค่าที่จุดแทนลิมิต ฟังก์ชันประกอบต้องติดตามทิศทางของค่าภายใน เช่น $x \rightarrow 0^-$ ทำให้ $x^2 \rightarrow 0^+$

1.5 ความต่อเนื่องที่จุดและบนช่วง

f ต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อครบทั้งสามเงื่อนไข

- $f(a)$ นิยามได้
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ มีค่าจำกัด
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

บนช่วงปิด $[a, b]$ ตรวจสอบความต่อเนื่องภายใน และที่ปลายช่วง ตรวจสอบจากด้านใน

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

ความไม่ต่อเนื่องที่ขจัดได้ ถ้าลิมิตเป็น L ให้กำหนดค่าใหม่ที่จุดเป็น L แต่ถ้าลิมิตซ้ายและขวาต่างกัน การแก้ค่าจุดเดียวไม่ทำให้ต่อเนื่อง

1.6 ลิมิตที่อนันต์และลิมิตอนันต์

สำหรับผลหารพหุนามที่มีดีกรีเศษ m ดีกรีส่วน n และสัมประสิทธิ์นำเป็น $\alpha, \beta \neq 0$

เมื่อ $x \rightarrow \pm\infty$	ผลลัพธ์
$m < n$	ลิมิตเท่ากับ 0
$m = n$	ลิมิตเท่ากับ $\frac{\alpha}{\beta}$
$m > n$	ตรวจสอบเครื่องหมาย $\frac{\alpha}{\beta} x^{m-n}$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

∞ ไม่ใช่จำนวนจริง และไม่ใช่แทนค่าเหมือนจำนวน ลิมิตสองด้านของ $\frac{1}{x}$ ที่ 0 ไม่มีอยู่

1.7 ลิมิตตรีโกณมิติ

ทุกมุมในสูตรต่อไปนี้วัดเป็นเรเดียน

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

$$1 - \cos u = 2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$$

ใช้จัดรูปเพื่อได้ $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$

2 อนุพันธ์และกฎการหาอนุพันธ์

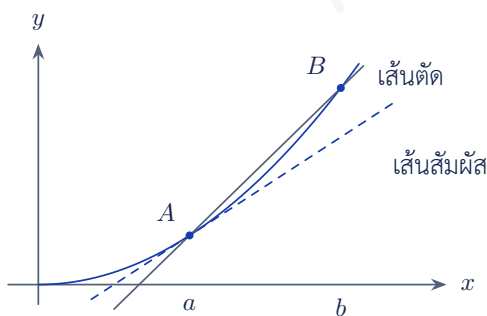
2.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงและอนุพันธ์

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยบน $[a, b]$ เมื่อ $a \neq b$ คือความชันของเส้นตัดผ่านสองจุดบนกราฟ

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

เมื่อจุดที่สองเข้าใกล้จุดแรก จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง หรืออนุพันธ์ที่ a

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



อนุพันธ์เป็นความชันเส้นสัมผัส เมื่อค่าลิมิตข้างต้นเป็นจำนวนจริง สัญลักษณ์ $f'(x)$ และ $\frac{dy}{dx}$ ใช้แทนอนุพันธ์ของ $y = f(x)$

2.2 กฎพื้นฐาน ผลคูณ และผลหาร

ให้ $u = u(x), v = v(x)$ หาอนุพันธ์ได้ และ c, p คงตัว

$$(c)' = 0, \quad (x^p)' = px^{p-1}$$

$$(cu \pm v)' = cu' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

สูตรกำลังใช้ ณ จุดที่นิพจน์เป็นจำนวนจริงและหาอนุพันธ์ได้ โดยเฉพาะเลขชี้กำลังลบหรือเศษส่วนต้องตรวจโดเมนและจุดศูนย์

ตัวอย่างย่อ $(x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

2.3 กฎลูกโซ่และอนุพันธ์อันดับสูง

ถ้า $y = F(u)$ และ $u = g(x)$ ให้หาอนุพันธ์ฟังก์ชันภายนอก แล้วคูณอนุพันธ์ฟังก์ชันภายใน

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = F'(g(x))g'(x)$$

$$(u^p)' = pu^{p-1}u', \quad f'' = (f')'$$

ตัวอย่างย่อ $[(3x^2 + 1)^4]' = 4(3x^2 + 1)^3(6x)$

ถ้าทราบ $f(g(x)) = H(x)$ ให้หาอนุพันธ์ก่อนแทนค่าที่ต้องการ และคงตัวคูณ $g'(x)$ ไว้ครบ

2.4 ตารางอนุพันธ์ฟังก์ชันสำคัญ

ให้ $u = u(x)$ และ $a > 0, a \neq 1$

ฟังก์ชัน	อนุพันธ์เทียบกับ x
$\sin u$	$\cos u u'$
$\cos u$	$-\sin u u'$
$\tan u$	$\sec^2 u u'$
$\cot u$	$-\csc^2 u u'$
$\sec u$	$\sec u \tan u u'$
$\csc u$	$-\csc u \cot u u'$
e^u	$e^u u'$
a^u	$a^u \ln a u'$
$\ln u$	$\frac{u'}{u} \quad (u > 0)$
$\ln u $	$\frac{u'}{u} \quad (u \neq 0)$
$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0)$

มุลตรีโกณมิติใช้เรเดียน และทุกสูตรต้องอยู่ในโดเมนของฟังก์ชันนั้น

ตัวอย่างย่อ ให้ $y = \ln(1+x^2)$ ภายในเป็นบวกทุก x จึงมี $y' = \frac{2x}{1+x^2}$

2.5 ความต่อเนื่องและการหาอนุพันธ์ได้

f หาอนุพันธ์ได้ที่ $a \implies f$ ต่อเนื่องที่ a

บทกลับไม่จริง เช่น $f(x) = |x|$ ต่อเนื่องที่ 0 แต่อนุพันธ์ซ้ายเป็น -1 และขวาเป็น 1 สำหรับจุดต่อของฟังก์ชันแบ่งช่วง

- ตรวจสอบความต่อเนื่องที่จุดต่อก่อน
- หาอัตราส่วนผลต่างจากซ้ายและขวา

$$f'_{\pm}(a) = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

หาอนุพันธ์ได้เมื่อทั้งสองลิมิตมีค่าจำกัดและเท่ากัน

2.6 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย

เมื่อสมการเชื่อม x, y ให้ถือ $y = y(x)$ แล้วหาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง พจน์ที่มี y ต้องใช้กฎลูกโซ่

$$(y^n)' = ny^{n-1}y', \quad (xy)' = y + xy'$$

ตัวอย่างย่อ จาก $x^2 + y^2 = R^2$ เมื่อ R คงตัว

$$2x + 2yy' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

ถ้าหา y'' ให้หาอนุพันธ์อีกครั้งก่อนแทนค่าจุด

3 เส้นสัมผัส พหุคูณกราฟ และการประยุกต์อนุพันธ์

3.1 เส้นสัมผัสและเส้นปกติ

ที่จุด $(a, f(a))$ ซึ่งมีอนุพันธ์เป็นจำนวนจริง

$$\text{เส้นสัมผัส } y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

เส้นปกติตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ถ้า $f'(a) \neq 0$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

ถ้า $f'(a) = 0$ เส้นสัมผัสคือ $y = f(a)$ และเส้นปกติคือ $x = a$

ตัวอย่างย่อ $y = x^2$ ที่ $x = 1$ มีเส้นสัมผัส $y = 2x - 1$

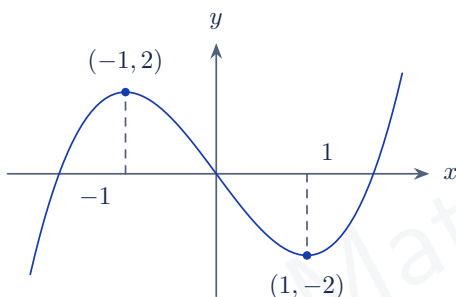
ถ้าเส้น $y = mx + b$ สัมผัสกราฟที่ $x = a$ ต้องมีทั้ง

$$f'(a) = m \text{ และ } f(a) = ma + b$$

3.2 ฟังก์ชันเพิ่ม ลด และจุดวิกฤต

จุดวิกฤตพิจารณาที่ค่าภายในโดเมนซึ่ง $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีอยู่ แบ่งช่วงที่จุดเหล่านี้และขอบโดเมน

$$f' > 0 \Rightarrow f \text{ เพิ่ม}, \quad f' < 0 \Rightarrow f \text{ ลด}$$



กราฟตัวอย่าง $f(x) = x^3 - 3x$ มี $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$

ช่วง	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
f'	+	-	+
f	เพิ่ม	ลด	เพิ่ม

3.3 การทดสอบค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ให้ f ต่อเนื่องที่ c และหาอนุพันธ์ได้สองข้างของ c

เครื่องหมาย f' ผ่าน c ผลที่ $x = c$

$+$ $\rightarrow$ $-$	สูงสุดสัมพัทธ์
$-$ $\rightarrow$ $+$	ต่ำสุดสัมพัทธ์
$+$ $\rightarrow$ $+$ หรือ $-$ $\rightarrow$ $-$	ไม่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ถ้า $f'(c) = 0$ และ f'' ต่อเนื่องใกล้ c ใช้

$$f''(c) < 0 \Rightarrow \text{สูงสุดสัมพัทธ์}$$

$$f''(c) > 0 \Rightarrow \text{ต่ำสุดสัมพัทธ์}$$

ถ้า $f''(c) = 0$ ยังสรุปไม่ได้ ให้ตรวจเครื่องหมาย f'

3.4 ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์

ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ จะมีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ เปรียบเทียบค่าที่ปลายช่วงและจุดวิกฤตภายในทั้งหมด

$$f(a), f(b), f(c_1), \dots, f(c_k)$$

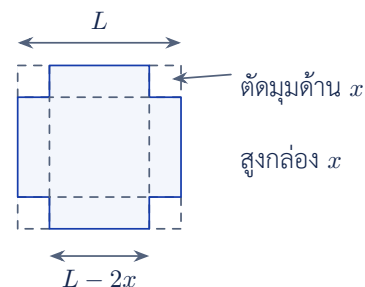
ตัวอย่างย่อ $f(x) = x^2 - 2x$ บน $[0, 3]$ มีจุดวิกฤต $x = 1$ จึงเทียบ $f(0) = 0, f(1) = -1, f(3) = 3$

ตำแหน่งคือ c ค่าคือ $f(c)$ และจุดคือ $(c, f(c))$ ต้องแยกให้ตรงกับสิ่งที่ถาม

3.5 การสร้างแบบจำลองหาค่าเหมาะที่สุด

- กำหนดตัวแปร หน่วย และขอบเขตที่เป็นไปได้
- ใช้ข้อจำกัดลดฟังก์ชันเป้าหมายเหลือตัวแปรเดียว
- หาอนุพันธ์และจุดวิกฤต ตรวจสอบค่าสุดขีดกับขอบเขต
- ถ้าตัวแปรเป็นจำนวนเต็ม ให้เปรียบเทียบค่าที่เป็นไปได้ใกล้จุดวิกฤต ไม่ปิดค่าโดยไม่ตรวจ

ตัวอย่างแบบจำลอง กระดาษจตุรัสด้าน L ตัดมุมเป็นจตุรัสด้าน x แล้วพับกล่องเปิดฝา



$$V(x) = x(L - 2x)^2, \quad 0 < x < \frac{L}{2}$$

$$V'(x) = (L - 2x)(L - 6x)$$

ปริมาตรมากที่สุดเมื่อ $x = \frac{L}{6}$ เพราะอนุพันธ์เปลี่ยนจากบวกเป็นลบ และ V เข้าใกล้ศูนย์ที่ขอบทั้งสอง

3.6 อัตราการเปลี่ยนแปลงในสถานการณ์

การเคลื่อนที่แนวตรง ให้ $s(t)$ เป็นตำแหน่ง ณ เวลา t

ความเร็วคือ $v(t)$ และความเร่งคือ $a(t)$

$$v = s', \quad a = v' = s'', \quad \text{อัตราเร็ว} = |v|$$

$v > 0$ และ $v < 0$ หมายถึงเคลื่อนที่ตามทิศบวกและทิศลบตามลำดับ การพบกันใช้ $s_1 = s_2$ ส่วนความเร็วเท่ากันใช้

$v_1 = v_2$ **รายรับและกำไร** เมื่อขาย x หน่วย ราคาต่อหน่วย $p(x)$ และต้นทุนรวม $C(x)$

$$R(x) = xp(x), \quad P(x) = R(x) - C(x)$$

ตรวจสอบค่าสุดขีดของ P ในขอบเขตการขายที่เป็นไปได้

4 ปริยานุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขต

4.1 ปริยานุพันธ์และค่าคงตัว

F เป็นปริยานุพันธ์ของ f บนช่วงหนึ่งเมื่อ $F' = f$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

C เป็นค่าคงตัวอิสระบนช่วงนั้น ใช้ค่าตั้งต้น เช่น $F(a) = b$ เพื่อกำหนด C และตรวจสอบผลโดยหาอนุพันธ์

$$\begin{aligned} \int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx \\ = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx \end{aligned}$$

เมื่อ α, β เป็นค่าคงตัว รวมค่าคงตัวในคำตอบสุดท้ายเป็น C ตัวเดียวได้

4.2 ตารางปริพันธ์พื้นฐาน

ตารางแสดงปริยานุพันธ์หนึ่งฟังก์ชัน ต้องเติม $+C$

ฟังก์ชัน $f(x)$	ปริยานุพันธ์ $F(x)$
x^p ($p \neq -1$)	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$
$\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sec^2 x$	$\tan x$
$\csc^2 x$	$-\cot x$
$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\csc x \cot x$	$-\csc x$
e^x	e^x
b^x ($b > 0, b \neq 1$)	$\frac{b^x}{\ln b}$

ทุกสูตรใช้บนช่วงที่นิพจน์เป็นจำนวนจริงและนิยามได้ สูตรตรีโกณมิติใช้เรเดียน

4.3 ฟังก์ชันภายในเป็นเชิงเส้น

ให้ a, b, p คงตัว และ $a \neq 0$

$$\int (ax + b)^p dx = \frac{(ax + b)^{p+1}}{a(p+1)} + C$$

เมื่อ $p \neq -1$ และนิพจน์นิยามได้บนช่วงที่พิจารณา

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$$

สูตรหลังต้องมี $ax + b \neq 0$ ตัวคูณ $\frac{1}{a}$ ขาดเขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชันภายใน

ตัวอย่างย่อ $\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C$

4.4 การแทนตัวแปร

เลือก $u = g(x)$ แล้ว $du = g'(x) dx$ เพื่อให้ส่วนที่เหลือเขียนด้วย u ได้ทั้งหมด

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

ตัวอย่างย่อ ให้ $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$ จะได้

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C$$

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต้องแทนกลับเป็น x ส่วนปริพันธ์จำกัดเขตเปลี่ยนขอบเขตทั้งสองตามตัวแปรใหม่

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

ใช้เมื่อ g หาอนุพันธ์ต่อเนื่อง และ f ต่อเนื่องบนช่วงที่ครอบคลุมค่าของ g ระหว่างขอบเขต

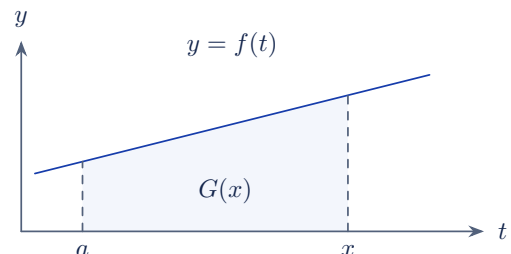
4.5 ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส

ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $F' = f$ แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ขอบบนลบขอบล่าง ไม่มี $+C$ ในค่าปริพันธ์จำกัดเขต และตัวแปรภายในเป็นตัวแปรที่ใช้คำนวณ

ตัวอย่างย่อ $\int_0^2 3x^2 dx = [x^3]_0^2 = 8$



สำหรับฟังก์ชันสะสม $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ เมื่อ f ต่อเนื่อง จะมี $G'(x) = f(x)$

4.6 สมบัติและการแบ่งช่วง

เมื่อปริพันธ์ทุกตัวมีอยู่ และ c อยู่ระหว่าง a, b

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

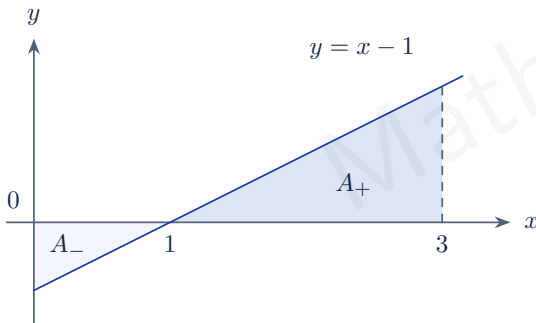
ปริพันธ์ของผลบวกหรือผลต่างแยกได้ และดึงค่าคงตัวออกได้ เช่นเดียวกับปริพันธ์ไม่จำกัดเขต **ฟังก์ชันแบ่งช่วง** ต้องแบ่งอินทิเกรตตามสูตรที่ใช้ในแต่ละช่วง ไม่ใช่สูตรช่วงเดียวครอบคลุมทั้งหมด สูตรข้างต้นไม่ใช้กับฟังก์ชันที่ไม่จำกัดใกล้จุดภายในหรือปลายช่วงโดยตรง กรณีดังกล่าวต้องใช้วิธีเพิ่มเติม

5 พื้นที่ การเคลื่อนที่ และความสัมพันธ์ของข้อมูล

5.1 ปริพันธ์กับพื้นที่ระหว่างกราฟและแกน

ให้ $a < b$ และ f ต่อเนื่องบน $[a, b]$

$$\text{Area} = \int_a^b |f(x)| dx$$



ถ้า $f \geq 0$ ปริพันธ์เท่ากับพื้นที่ ถ้า $f \leq 0$ ปริพันธ์เท่ากับลบพื้นที่ โดย A_+, A_- เป็นพื้นที่ส่วนเหนือและใต้แกนตามลำดับ

$$\int_a^b f(x) dx = A_+ - A_-$$

$$\text{Area} = A_+ + A_-$$

หา $f(x) = 0$ แล้วแบ่งช่วงที่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย เช่น

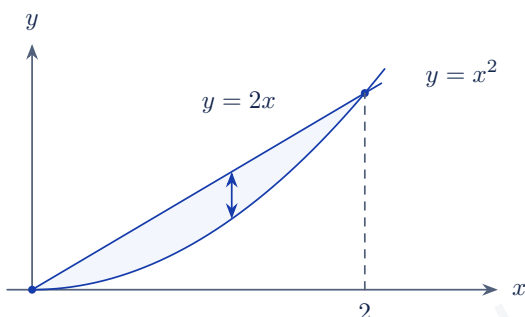
$f(x) = x - 1$ บน $[0, 3]$

$$\int_0^3 (x - 1) dx = \frac{3}{2}, \quad \text{Area} = \frac{5}{2}$$

5.2 พื้นที่ระหว่างกราฟสองเส้น

ให้ f, g ต่อเนื่อง หาเขตปิดล้อมจากจุดตัด $f(x) = g(x)$ และเงื่อนไขขอบเขต ถ้า $f \geq g$ ตลอด $[a, b]$

$$\text{Area} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



ตัวอย่าง $y = 2x$ กับ $y = x^2$ ตัดกันที่ $x = 0, 2$ และเส้นตรงอยู่ด้านบนระหว่างจุดตัด

$$\text{Area} = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}$$

ถ้าลำดับบนล่างสลับกัน ต้องแบ่งช่วงก่อนหาผลบวกของพื้นที่

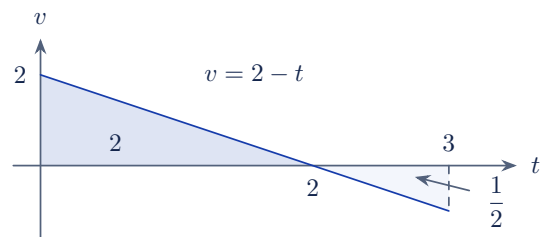
5.3 การกระจัดและระยะทางทั้งหมด

ให้ $v(t)$ เป็นความเร็ว และ $s(t)$ เป็นตำแหน่ง บนช่วงเวลา

$[a, b]$ โดย $a < b$

$$\Delta s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$$

$$D = \int_a^b |v(t)| dt$$



ตัวอย่าง $v(t) = 2 - t$ เมตรต่อวินาที บน $[0, 3]$ เปลี่ยนทิศที่ $t = 2$ วินาที พื้นที่เหนือแกนเท่ากับ 2 ส่วนพื้นที่ใต้แกนเท่ากับ $\frac{1}{2}$

$$\Delta s = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ เมตร}$$

$$D = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ เมตร}$$

แก้ $v(t) = 0$ แล้วตรวจเครื่องหมายของ v เพื่อระบุเวลาที่เปลี่ยนทิศ

5.4 ปริมาณสะสมและค่าตั้งต้น

ให้ $Q(t)$ เป็นปริมาณ และ $r(t) = Q'(t)$ เป็น

อัตราการเปลี่ยนแปลงสุทธิ

$$Q(b) = Q(a) + \int_a^b r(t) dt$$

ถ้ามีอัตราเข้าและออก ให้ใช้ $r = r_{\text{เข้า}} - r_{\text{ออก}}$ ปริพันธ์ให้ปริมาณที่เปลี่ยนไป ต้องบวกค่าตั้งต้นจึงได้ค่าปลายทาง

ตัวอย่างย่อ น้ำเริ่มต้น 10 ลิตร ไหลเข้าสุทธิ $2t$ ลิตรต่อวินาที ในช่วง $0 \leq t \leq 3$ นาที

$$Q(3) = 10 + \int_0^3 2t dt = 19 \text{ ลิตร}$$

หน่วยปริพันธ์ = หน่วยอัตรา $\times$ หน่วยตัวแปร เช่น ลิตรต่อวินาทีคูณนาทีได้ลิตร

5.5 การย้อนหาฟังก์ชันจากข้อมูลอนุพันธ์

ถ้าทราบ f'' ให้หาปฏิยานุพันธ์สองครั้ง โดยมีค่าคงตัวใหม่ในแต่ละครั้ง แล้วใช้ข้อมูล f' และ f กำหนดค่าคงตัว **พหุนาม**

ติกรีสาม ถ้าจุดวิกฤตคือ $u \neq v$ จะมี

$$f'(x) = k(x - u)(x - v) \quad (k \neq 0)$$

หาปฏิยานุพันธ์ แล้วใช้ค่าฟังก์ชันหรือพื้นที่ที่กำหนดค่าคงตัว