

สรุปเนื้อหา เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

1 รูปมาตรฐาน การดำเนินการ และสังยุค

1.1 จำนวนเชิงซ้อนและส่วนประกอบ

จำนวนเชิงซ้อนเขียนได้เป็น $z = a + bi$ โดย $a, b \in \mathbb{R}$ และ $i^2 = -1$ เซตจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วย $\mathbb{C}$

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b$$

ส่วนจินตภาพคือจำนวนจริง b ส่วนพจน์จินตภาพคือ bi

ชนิด	เงื่อนไข
จำนวนจริง	$b = 0$
จินตภาพแท้	$a = 0, b \neq 0$
จำนวนไม่จริง	$b \neq 0$

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ และ } b = d$$

1.2 กำลังของหน่วยจินตภาพ

กำลังของ i มีรอบซ้ำทุก 4 พจน์ สำหรับ $q \in \mathbb{Z}$

เลขชี้กำลัง	$4q$	$4q + 1$	$4q + 2$	$4q + 3$
ค่า	1	i	-1	$-i$
$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$				

ตัวอย่างย่อ $2026 = 4(506) + 2$ จึงมี $i^{2026} = -1$
ถ้าสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ไม่เท่ากัน ต้องรวมพจน์ตามเศษของเลขชี้กำลังแยกกัน

1.3 การบวก ลบ และคูณ

ให้ $z = a + bi, w = c + di$ เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

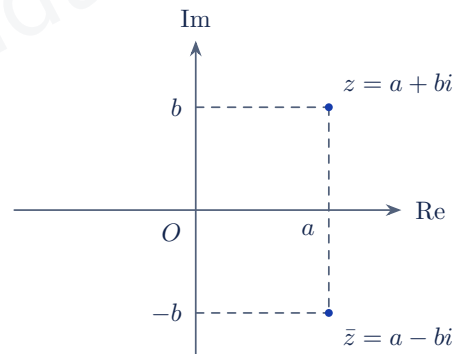
การคูณใช้สมบัติแจกแจงแล้วแทน $i^2 = -1$

ตัวอย่างย่อ $(2 + i)(1 - 3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 5 - 5i$

การดำเนินการ	เอกลักษณ์	อินเวอร์สของ z
บวก	0	$-z$
คูณ	1	$\frac{1}{z}$ เมื่อ $z \neq 0$

1.4 สังยุคและระนาบเชิงซ้อน

ให้ $z = a + bi$ สังยุคของ z คือ $\bar{z} = a - bi$ ในระนาบเชิงซ้อน แกนนอนแทนส่วนจริง แกนตั้งแทนส่วนจินตภาพ



$$z + \bar{z} = 2a, \quad z - \bar{z} = 2bi, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \frac{\bar{z}}{w} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

z เป็นจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $z = \bar{z}$

สมการที่มีสังยุคใช้ $z = x + yi, \bar{z} = x - yi$ แล้วเทียบส่วนจริงและส่วนจินตภาพ โดย $x, y \in \mathbb{R}$

1.5 การหารและอินเวอร์สการคูณ

ให้ $z = a + bi, w = c + di \neq 0$ คูณทั้งเศษและส่วนด้วยสังยุคของตัวส่วน

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \quad (z \neq 0)$$

ตัวอย่างย่อ $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$

1.6 รากที่สองในรูปส่วนประกอบ

หารากของ $w^2 = a + bi$ โดยให้ $w = x + yi$ และ $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ จะได้

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b$$

$$x^2 = \frac{R + a}{2}, \quad y^2 = \frac{R - a}{2}$$

เลือกเครื่องหมาย x, y ให้สอดคล้องกับ $2xy = b$ ถ้า $a + bi \neq 0$ จะมีรากสองค่าตรงข้ามกัน ส่วนศูนย์มีรากแตกต่างกันเพียงค่าเดียว

ตัวอย่างย่อ รากที่สองของ $3 + 4i$ คือ $2 + i$ และ $-2 - i$ เพราะ $(2 + i)^2 = 3 + 4i$

2 คำสัมบูรณ์ ระยะทาง และรูปเรขาคณิต

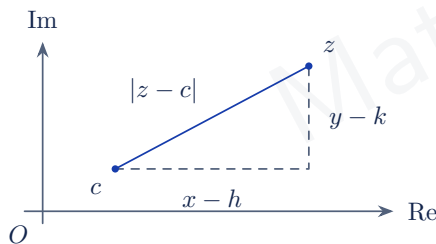
2.1 คำสัมบูรณ์และระยะระหว่างจุด

ให้ $z = a + bi$ คำสัมบูรณ์คือระยะจากจุดกำเนิดถึงจุดแทน z

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |z|^2 = z\bar{z}$$

ให้ $z = x + yi$ และ $c = h + ki$ จะมี

$$|z - c| = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$



$|z - c|$ คือระยะระหว่างจุดแทน z กับจุดแทน c จึงไม่เป็นลบ

2.2 สมบัติของคำสัมบูรณ์

$$|\bar{z}| = |-z| = |z|, \quad |zw| = |z||w|$$

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$$

$$|z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{Z}, z \neq 0)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$$

สำหรับ $z = 0$ สูตรกำลังยังใช้ได้เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

2.3 เอกลักษณ์และอสมการ

เมื่อ $t \in \mathbb{R}$

$$|z + tw|^2 = |z|^2 + t^2|w|^2 + 2t \operatorname{Re}(z\bar{w})$$

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

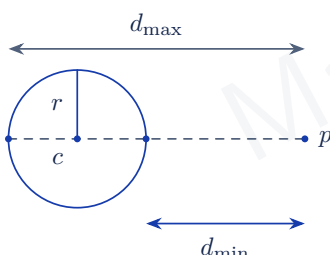
$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

โดยทั่วไป $|z + w| \neq |z| + |w|$ ต้องรักษาวงเล็บในการใช้สูตร

2.4 ระยะต่ำสุดและสูงสุดบนวงกลม

ให้ $|z - c| = r$ โดย $r > 0$ และ p เป็นจุดคงที่ ระยะ $|z - p|$ มีขอบเขต

$$d_{\min} = ||c - p| - r|, \quad d_{\max} = |c - p| + r$$



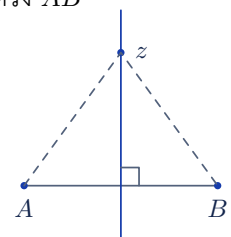
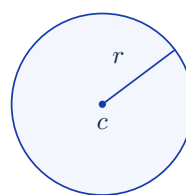
สูตรใช้ได้ทั้งเมื่อ p อยู่ภายใน บน หรือภายนอกวงกลม ภาพแสดงกรณีภายนอก

2.5 วงกลมและเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉาก

ให้ c เป็นจุดคงที่ และ $r > 0$

เงื่อนไข	เซตจุด
$ z - c = r$	วงกลม ศูนย์กลาง c รัศมี r
$ z - c < r$	ภายในวงกลม ไม่รวมเส้นขอบ
$ z - c \leq r$	ภายในวงกลม รวมเส้นขอบ

ถ้าจุด $A \neq B$ เงื่อนไข $|z - A| = |z - B|$ ให้เส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากของส่วนของเส้นตรง AB



อสมการเคร่งครัดใช้เส้นขอบประ ส่วนอสมการที่รวมความเท่ากันใช้เส้นขอบทึบ

2.6 อัตราส่วนระยะคงที่

ให้ $A \neq B, t > 0, t \neq 1$ เงื่อนไข

$$|z - A| = t|z - B|$$

เป็นวงกลมที่มีศูนย์กลาง c และรัศมี r ดังนี้

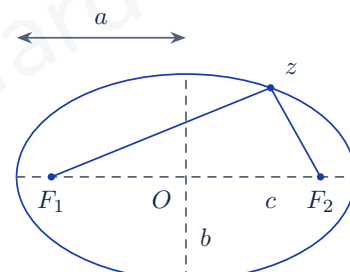
$$c = \frac{A - t^2 B}{1 - t^2}, \quad r = \frac{t|A - B|}{|1 - t^2|}$$

ถ้า $t = 1$ จะเป็นเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉาก ในรูป $\left| \frac{z - A}{z - B} \right| = t$ ต้องกำหนด $z \neq B$ ด้วย

2.7 วงรีจากผลบวกระยะ

ให้ $F_1 \neq F_2$ เป็นโฟกัสคงที่ และ $a > 0$

$$|z - F_1| + |z - F_2| = 2a > |F_1 - F_2|$$



กำหนด $c = \frac{1}{2}|F_1 - F_2|$ และ $b > 0$ จะได้

$$b^2 = a^2 - c^2$$

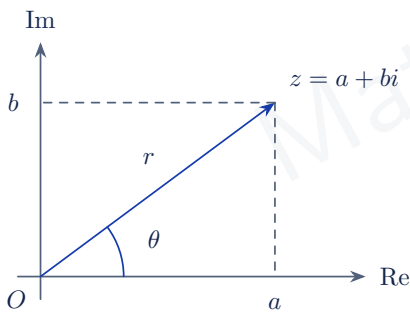
แกนเอกยาว $2a$ แกนโทยาว $2b$ หากผลบวกระยะเท่ากับระยะระหว่างโฟกัส เซตจุดจะเสื่อมเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง

3 รูปเชิงขั้ว อาร์กิวเมนต์ และการยกกำลัง

3.1 รูปเชิงขั้วของจำนวนไม่เป็นศูนย์

ให้ $z = a + bi \neq 0$, $r = |z| > 0$ และ θ เป็นมุมที่วัดจากแกนจริงด้านบวกถึงเวกเตอร์แทน z โดยทวนเข็มนาฬิกาเป็นบวก

$$z = r \operatorname{cis} \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$



$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

สัญลักษณ์ $\operatorname{cis} \theta$ หมายถึง $\cos \theta + i \sin \theta$ และศูนย์ไม่มีอาร์กิวเมนต์

3.2 อาร์กิวเมนต์หลักและการเลือกควอดรนต์

เอกสารนี้กำหนดอาร์กิวเมนต์หลักให้มีช่วง

$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$$

มุมอาร์กิวเมนต์ทั้งหมดคือ $\operatorname{Arg} z + 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$ หาก $a, b \neq 0$ ให้ $\alpha = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| \in (0, \frac{\pi}{2})$

ควอดรนต์	เครื่องหมาย (a, b)	$\operatorname{Arg} z$
I	$(+, +)$	α
II	$(-, +)$	$\pi - \alpha$
III	$(-, -)$	$-\pi + \alpha$
IV	$(+, -)$	$-\alpha$

บนแกนจริงด้านบวกและลบ มุมหลักเป็น 0 และ π บนแกนจินตภาพด้านบวกและลบ เป็น $\frac{\pi}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างย่อ $-\sqrt{3} + i = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$ อยู่ควอดรนต์ II

แทนเจนต์เพียงค่าเดียวไม่ระบุควอดรนต์ และจุดบนแกนไม่อยู่ในควอดรนต์ใด

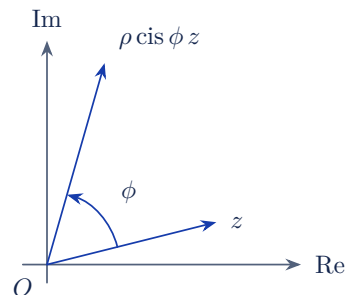
3.3 การคูณ ทหาร และการหมุน

ให้ $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \alpha$, $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \beta$ โดย $r_1, r_2 > 0$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\alpha + \beta)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\alpha - \beta)$$

การคูณด้วย $\rho \operatorname{cis} \phi$ โดย $\rho > 0$ ขยายขนาดเป็น ρ เท่า และหมุนรอบจุดกำเนิดด้วยมุม ϕ



ถ้าขยายและหมุนรอบจุด c ให้เขียน

$$w - c = \rho \operatorname{cis} \phi (z - c)$$

เมื่อถ้ามุมหลัก ต้องปรับผลบวกหรือผลต่างของมุมกลับสู่ช่วง $(-\pi, \pi]$

3.4 ทฤษฎีบทเดอมัวร์

สำหรับ $z = r \operatorname{cis} \theta \neq 0$ และ $n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

$$z^n + \bar{z}^n = 2r^n \cos(n\theta)$$

$$z^n - \bar{z}^n = 2ir^n \sin(n\theta)$$

ตัวอย่างย่อ $(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 \operatorname{cis}(2\pi) = 16$

เมื่อ $u = \operatorname{cis} \theta$ จะมี $|u| = 1$, $u^{-1} = \bar{u}$ และ

$$u^n + u^{-n} = 2 \cos(n\theta)$$

$$u^n - u^{-n} = 2i \sin(n\theta)$$

3.5 ระยะและการนับตำแหน่งจากมุม

ให้ $z_j = r_j \operatorname{cis} \theta_j$ โดย $r_j > 0$ สำหรับ $j = 1, 2$

$$|z_1 - z_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

กำลังจำนวนเต็ม k ที่มีทิศปลายทางเป็นมุม α ต้องมี

$$k\theta = \alpha + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

แล้วนับเฉพาะ k ในช่วงที่โจทย์กำหนด หากกำหนดทั้งขนาดและตำแหน่ง ต้องตรวจเงื่อนไขขนาดร่วมด้วย

4 รากที่ n รากเอกภาพ และผลรวมกำลัง

4.1 สูตรรากที่ n

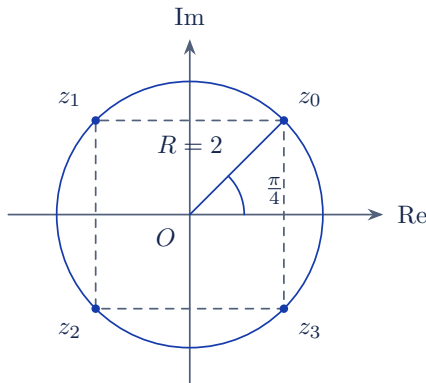
ให้ $w = r \operatorname{cis} \theta \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก รากของ $z^n = w$ มีครบ n ค่าแตกต่างกัน

$$z_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \\ k = 0, 1, \dots, n-1$$

รากทุกค่ามีขนาด $R = \sqrt[n]{r}$ และมุมของรากติดกันห่าง $\frac{2\pi}{n}$ การเปลี่ยนอาร์กิวเมนต์ของ w เพียงสลับลำดับรากชุดเดิม

ตัวอย่างย่อ $z^4 = -16 = 16 \operatorname{cis} \pi$ ให้ราก

$$2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}, \quad 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}, \quad 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}, \quad 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$$



สมการ $z^n = 0$ มีรากแตกต่างกันเพียง 0

4.2 รูปหลายเหลี่ยมที่เกิดจากราก

สำหรับ $w \neq 0$ รากอยู่บนวงกลมศูนย์กลางจุดกำเนิด รัศมี $R = |w|^{\frac{1}{n}}$ เมื่อ $n \geq 3$ จะเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

$$\text{ด้านยาว } s = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\text{ความยาวรอบรูป} = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\text{Area} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} \quad (n \geq 3)$$

สูตรด้านใช้ได้เมื่อ $n = 2$ ด้วย ซึ่งรากสองค่าเป็นปลายเส้นผ่านศูนย์กลางเดียวกัน

4.3 ผลรวมและผลคูณของรากทั้งหมด

ให้ $z_0, \dots, z_{n-1}$ เป็นรากของ $z^n = w \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \quad (n \geq 2)$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^{n+1} w$$

ต้องรวมรากทั้งหมดอย่างละหนึ่งครั้ง จึงใช้สูตรได้

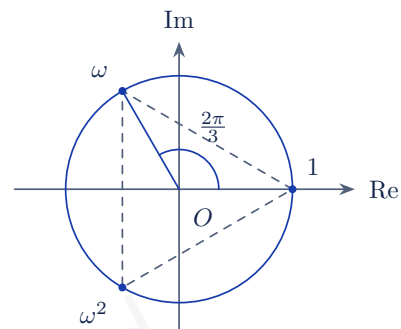
4.4 รากเอกภาพและผลรวมกำลัง

รากเอกภาพอันดับ n คือรากของ $z^n = 1$ เขียนได้เป็น

$$\omega_k = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

เมื่อ $m \in \mathbb{Z}$ จะมี

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^m = \begin{cases} n & n \mid m \\ 0 & n \nmid m \end{cases}$$



ภาพแสดง $n = 3$ โดย $\omega = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$ จึงมี

$$\omega^3 = 1, \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0, \quad \omega \neq 1$$

ถ้า $z_k = \rho \omega_k$ โดย $\rho \neq 0$ จะได้

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^m = \rho^m \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^m$$

4.5 การลดกำลังและรากร่วม

ถ้า $z_j^n = w$ และ q, s เป็นจำนวนเต็มโดย $q \geq 0, 0 \leq s < n$ จะได้

$$z_j^{qn+s} = w^q z_j^s$$

ให้ $z^a = u, z^b = v$ โดย a, b เป็นจำนวนเต็มบวก $b > a$ และ $u, v \neq 0$ จะมีเงื่อนไขจำเป็น

$$z^{b-a} = \frac{v}{u}$$

ต้องนำค่าที่ได้แทนกลับทุกสมการ เงื่อนไขจากการหารสมการเพียงอย่างเดียวอาจให้คำตอบเกิน

4.6 การแทนตัวแปรและการนับราก

สำหรับสมการ $Q(z^m) = 0$ โดย m เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ $t = z^m$ แล้วแก้ $Q(t) = 0$ ก่อน

$$Q(t) = 0 \rightarrow t_j \rightarrow z^m = t_j$$

• $t_j \neq 0$ แต่ละค่าที่แตกต่างกันให้ราก z แตกต่างกัน m ค่า และ $|z| = |t_j|^{\frac{1}{m}}$

• $t_j = 0$ ให้รากแตกต่างกันเพียง $z = 0$

ถ้าได้ราก z ซ้ำกัน ให้รวมเป็นค่าเดียวเมื่อนับรากแตกต่างกัน

5 สมการพหุนาม รากสังยุค และสัมประสิทธิ์

5.1 จำนวนรากและพหุภาพ

ทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิตระบุว่า พหุนามดีกรี $n \geq 1$ ที่มีสัมประสิทธิ์ใน $\mathbb{C}$ มีรากใน $\mathbb{C}$ รวม n ราก เมื่อนับตามพหุภาพ

$$P(z) = (z - c)^m Q(z), \quad Q(c) \neq 0$$

ราก c มีพหุภาพ m และนับเป็นหนึ่งค่าเมื่อนับเฉพาะรากแตกต่างกัน

ตัวอย่างย่อ $(z - 1)^2(z + i) = 0$ มีรากแตกต่างกัน 2 ค่า คือ $1, -i$ แต่รวม 3 รากเมื่อนับตามพหุภาพ

5.2 สมการกำลังสองสัมประสิทธิ์จริง

ให้ $az^2 + bz + c = 0$ โดย $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ และ $\Delta = b^2 - 4ac$

$$z = \begin{cases} \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} & \Delta \geq 0 \\ \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} & \Delta < 0 \end{cases}$$

ดิสคริมีแนนต์ ลักษณะราก

$\Delta > 0$	รากจริงต่างกันสองค่า
$\Delta = 0$	รากจริงซ้ำ พหุภาพสอง
$\Delta < 0$	รากไม่จริงคู่สังยุค

5.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือและตัวประกอบ

หารพหุนาม $P(z)$ ด้วย $z - c$ จะได้

$$P(z) = (z - c)Q(z) + P(c)$$

$$(z - c) \mid P(z) \iff P(c) = 0$$

Q คือพหุนามผลหาร และเศษเท่ากับค่าที่แทน c ลงในพหุนามเดิม

5.4 รากสังยุคของพหุนามสัมประสิทธิ์จริง

ถ้า P มีสัมประสิทธิ์จริง และ $a + bi$ เป็นราก โดย $b \neq 0$ แล้ว $a - bi$ เป็นรากด้วย และมีพหุภาพเท่ากัน

$$P(a + bi) = 0 \implies P(a - bi) = 0$$

$$[z - (a + bi)][z - (a - bi)] = (z - a)^2 + b^2$$

ตัวอย่างย่อ ราก $2 + i$ และ $2 - i$ ให้ตัวประกอบ $z^2 - 4z + 5$ พหุนามสัมประสิทธิ์จริงดีกรี 2 จึงมีรากจริงอย่างน้อยหนึ่งค่า

5.5 ความสัมพันธ์ของรากกับสัมประสิทธิ์

ให้ $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ โดย $a_n \neq 0$ และให้ $r_1, \dots, r_n$ เป็นรากที่นับตามพหุภาพ สูตรวีเอตาให้

$$\sum_{j=1}^n r_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\prod_{j=1}^n r_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

เมื่อ $n \geq 2$ จะมี

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

สำหรับ $z^3 + Az^2 + Bz + C$ จะได้

$$r_1 + r_2 + r_3 = -A, \quad r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = B$$

$$r_1 r_2 r_3 = -C$$

5.6 รากตรรกยะและคู่อันดับ

ให้ P มีสัมประสิทธิ์จำนวนเต็ม ถ้า $\frac{p}{q} \neq 0$ เป็นรากตรรกยะในรูปอย่างต่ำ โดย $q > 0$ จะต้องเป็น

$$p \mid a_0, \quad q \mid a_n$$

ราก 0 ตรวจจาก $a_0 = 0$ พหุนามอนิกมีรากตรรกยะเป็นจำนวนเต็ม และต้องแทนตรวจค่าที่เป็นไปได้ทุกค่า ถ้า P มีสัมประสิทธิ์ตรรกยะ และมีราก $u + v\sqrt{d}$ โดย $u, v, d \in \mathbb{Q}, d > 0, \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ แล้ว $u - v\sqrt{d}$ เป็นรากด้วย

5.7 ลดกำลังด้วยพหุนามที่รากสอดคล้อง

ถ้าหาร $P(x)$ ด้วยพหุนาม $q(x)$ ได้

$$P(x) = q(x)Q(x) + R(x)$$

แล้วทุกค่า z ที่ทำให้ $q(z) = 0$ จะมี

$$P(z) = R(z)$$

เช่น ถ้า $z^2 + z + 1 = 0$ จะได้ $z^2 = -z - 1$ และ $z^3 = 1$ จึงลดกำลังสูงก่อนคำนวณได้

5.8 ผลรวมกำลังสามและการตรวจคำตอบ

ให้ $t = \alpha + \beta$ และ $p = \alpha\beta$ จะมี

$$t^3 - 3pt = \alpha^3 + \beta^3$$

- ถ้าทราบเพียง p^3 ยังเลือกค่า p ใน $\mathbb{C}$ เพียงค่าเดียวไม่ได้ ต้องตรวจเงื่อนไขเพิ่ม
- สมการเศษส่วนต้องตัดรากต้องห้ามจากตัวส่วนเดิม
- ผลรวมขนาด $\sum |z_j|$ ต่างจากขนาดผลรวม $|\sum z_j|$ และต้องนับรากตามทิวทัศน์ระบุ