

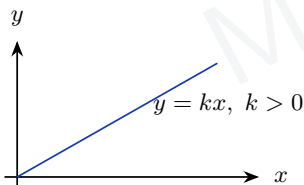
การแปรผันตรง ผกผัน และหลายตัวแปร
การแปรผันตรง

y แปรผันตรงกับ x เขียน $y \propto x$

$$y = kx, \quad k = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

k คือค่าคงตัวการแปรผัน ซึ่งคงเดิมเมื่อเปรียบเทียบข้อมูลภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน

ถ้า x เพิ่มขึ้น t เท่า y เพิ่มขึ้น t เท่า



กราฟเป็นเส้นตรงผ่านจุดกำเนิด ถ้าเป็น $y = kx + b$ และ $b \neq 0$ จะไม่ใช่การแปรผันตรงกับ x

แปรผันตรงกับกำลังหรือราก

$$y \propto x^n \Rightarrow y = kx^n$$

เช่น $y \propto x^2$ ใช้ $k = y/x^2$ ไม่ใช่ y/x

เมื่อ x เพิ่มขึ้น t เท่า y เพิ่มขึ้น t^n เท่า

$$y \propto \sqrt{x} \Rightarrow y = k\sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

หาก x เพิ่มขึ้น 4 เท่า y เพิ่มขึ้น 2 เท่า

สำหรับกำลังเศษส่วนทั่วไปในชีตนี้ใช้ปริมาณบวก

การหาค่าคงตัว

แปลข้อความเป็นสมการ $\rightarrow$ แทนข้อมูลคู่ที่ทราบ $\rightarrow$ หา k
 $\rightarrow$ ใช้สมการกับข้อมูลใหม่

เช่น $y \propto x^2$ และ $(x, y) = (2, 12)$

$$12 = k(2)^2 \Rightarrow k = 3, \quad y = 3x^2$$

เมื่อ $x = 5$ จึงมี $y = 75$

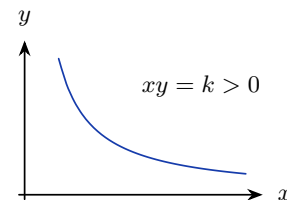
หน่วยของ k ขึ้นกับสูตร และต้องคงหน่วยเดียวกันตลอด

การแปรผกผัน

y แปรผกผันกับ x เขียนเป็น

$$y = \frac{k}{x}, \quad xy = k, \quad x \neq 0$$

เมื่อ x เพิ่มขึ้น t เท่า y จะเป็น $1/t$ เท่า



พื้นที่สี่เหลี่ยมที่มีด้าน $x, y > 0$ เท่ากับ $xy = k$ คงเดิม จึงเห็นเหตุที่ใช้ผลคูณเป็นค่าคงตัว

ผกผันกับกำลังและนิพจน์ทั้งกลุ่ม

$$y \propto \frac{1}{x^n} \Rightarrow y = \frac{k}{x^n}$$

$$y \propto \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y = \frac{k}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

ถ้าแปรผกผันกับ $x + z$ ต้องเขียน $y = k/(x + z)$ ไม่แยกเป็น $k/x + k/z$

ตัวส่วนทุกตัวต้องไม่เป็นศูนย์ และกรณีต้องมีความหมายในจำนวนจริง

เหตุการณ์ที่มีผลคูณคงตัว

ระยะทางคงที่ s : $vt = s$ จึงมี $t \propto 1/v$

งานคงที่ คน n คน ทำงานคนละอัตรา r หน่วยต่อชั่วโมง เป็นเวลา t

$$W = nrt$$

เมื่อ W, r คงที่ จะมี $nt = W/r$ คงที่

ข้อสรุปจำนวนคนแปรผกผันกับเวลาใช้เมื่ออัตราต่อคนเท่ากันและไม่เปลี่ยนจากการเพิ่มคน

อัตราส่วน ร้อยละ และสถานการณ์

การแปรผันเกี่ยวเนื่อง

y แปรผันตรงกับผลคูณของ x, z

$$y = kxz, \quad k = \frac{y}{xz}$$

รูปทั่วไปเมื่อปริมาณเป็นบวก

$$y = kx^a z^b$$

a, b คือเลขชี้กำลังคงตัว เช่น $y \propto x^2 \sqrt{z}$ ให้ $y = kx^2 z^{1/2}$

หากเปรียบเทียบเฉพาะ x ต้องกำหนด z คงที่

การแปรผันรวม

ตรงกับ x^a และผกผันกับ z^b

$$y = \frac{kx^a}{z^b}$$

ข้อมูลสองชุดใช้ k เดียวกัน จึงหาสมการกันได้

$$\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^b$$

ใช้เมื่ออัตราส่วนมีความหมาย และ y_1, x_1, z_1, z_2 ไม่เป็นศูนย์

ตัวอย่าง $y \propto x^2/z$ เมื่อ x เป็น 3 เท่า และ z เป็น 2 เท่า

จะมี $y_2/y_1 = 9/2$

ร้อยละและตัวคูณการเปลี่ยนแปลง

เพิ่ม $p\%$: คูณด้วย $1 + p/100$

ลด $p\%$: คูณด้วย $1 - p/100$

ถ้า $y = kx^2$ และ x เพิ่ม 20%

$$\frac{y_2}{y_1} = (1.2)^2 = 1.44$$

จึงเพิ่ม 44% ไม่ใช่ 40%

สำหรับ $y = kx^a/z^b$ ให้ยกกำลังตัวคูณของแต่ละปริมาณ
ก่อนหารกัน ไม่บวกร้อยละโดยตรง

การเชื่อมหลายความสัมพันธ์

ถ้า $y = k_1 x^a$ และ $x = k_2 t^b$ แล้ว

$$y = k_1 (k_2 t^b)^a = K t^{ab}$$

โดย $K = k_1 k_2^a$ เป็นค่าคงตัวใหม่ ภายใต้โดเมนที่
กฎเลขยกกำลังใช้ได้

ผลบวกของส่วนที่มีกฎต่างกัน

กำหนด P, Q เป็นส่วนประกอบของปริมาณรวม $y = P + Q$

ถ้า $P = k_1 x, Q = k_2 x$ จะมี $y = (k_1 + k_2)x$ จึง

ยังแปรผันตรงกับ x

ถ้า $P = k_1 x, Q = k_2/x$ จะได้

$$y = k_1 x + \frac{k_2}{x} \quad (x \neq 0)$$

ไม่ใช้การแปรผันตรงหรือผกผันแบบเดียว ต้องใช้ข้อมูลอย่างน้อยสองเงื่อนไขอิสระเพื่อหา k_1, k_2

ส่วนคงตัวรวมกับส่วนแปรผัน

$$y = b + kx$$

b คือส่วนคงตัว และ kx คือส่วนที่แปรผันตรงกับ x

จากข้อมูล $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ที่ $x_1 \neq x_2$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = y_1 - kx_1$$

ใช้ $y_2/y_1 = x_2/x_1$ ไม่ได้เมื่อ $b \neq 0$

ตัวอย่างค่าบริการเริ่มต้นรวมค่าบริการตามปริมาณ ต้องแยก
สองส่วนก่อนตั้งสมการ

เวลา ปริมาตร และหน่วย

อัตราการผลิตคงที่ r : ปริมาณ $Q = rt$

ถ้ามีเวลาเตรียมงาน t_0 ให้ใช้เวลาผลิตจริง

$$Q = r(t - t_0), \quad t \geq t_0$$

หน้าตัดคงที่พื้นที่ B : ปริมาตร $V = Bh$ ถ้า B คงที่ V

แปรผันตรงกับความสูง h

รูปทรงคล้ายกัน เมื่อความยาวเป็น k เท่า พื้นที่เป็น k^2 เท่า

และปริมาตรเป็น k^3 เท่า

ตรวจหน่วยก่อนแทนค่า เช่น 30 นาที = 0.5 ชั่วโมง ไม่ใช่
0.30 ชั่วโมง