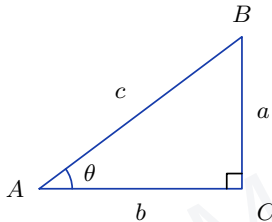


นิยาม มุมสำคัญ และเอกลักษณ์

ด้านตรงข้าม ด้านประชิด และด้านฉาก

ในสามเหลี่ยม ABC ให้ $C = 90^\circ$ และมุมอ้างอิง $A = \theta$



$a = BC$ คือด้านข้ามมุม θ ; $b = CA$ คือด้านชิดมุม θ ;
 $c = AB$ คือด้านฉาก

$$\sin \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}, \quad \tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$$

ด้านประชิดคือด้านประกอบมุมที่ไม่ใช่ด้านฉาก เมื่อเปลี่ยนมุมอ้างอิง ด้านข้ามกับด้านชิดสลับกัน

ส่วนกลับและการสร้างสามเหลี่ยม

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์

ถ้าทราบ $\tan \theta = 3/4$ และ θ เป็นมุมแหลม ให้สร้างด้านข้าม 3 ด้านชิด 4 แล้วใช้พีทาโกรัสได้ด้านฉาก 5

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \cot \theta = \frac{4}{3}$$

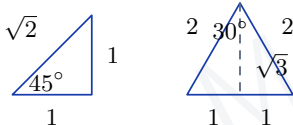
อัตราส่วนด้านไม่จำเป็นต้องเป็นความยาวจริง แต่กำหนดรูปคล้ายกันได้

สามเหลี่ยมมุมพิเศษ

$45^\circ-45^\circ-90^\circ$: อัตราส่วนด้าน $1 : 1 : \sqrt{2}$

$30^\circ-60^\circ-90^\circ$: ด้านตรงข้ามแต่ละมุมเป็น $1 : \sqrt{3} : 2$ ตามลำดับ

รูปหลังได้จากแบ่งครึ่งสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านยาว 2

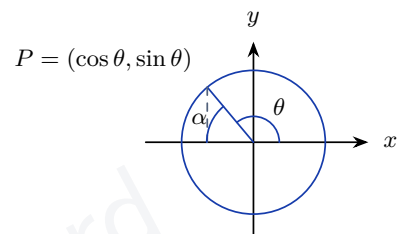


ตารางค่ามุมสำคัญ

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่กำหนด

$\tan 90^\circ$ ไม่กำหนดเพราะ $\cos 90^\circ = 0$

วงกลมหนึ่งหน่วยและมุมบ้าน



$x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ เมื่อวัดมุมจากแกน x บวกทวนเข็มนาฬิกา

ถ้า $90^\circ < \theta < 180^\circ$ มุมแหลมอ้างอิงคือ $\alpha = 180^\circ - \theta$ ซึ่งทำกับแกน x ด้านลบ

$$\sin \theta = \sin \alpha, \quad \cos \theta = -\cos \alpha, \quad \tan \theta = -\tan \alpha$$

เอกลักษณ์และมุมเติมเต็ม

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$$

สูตรเศษส่วนใช้เมื่อฟังก์ชันทุกตัวมีความหมายคู่ฟังก์ชันเติมเต็ม (co-function)

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

สลับ $\sin$ กับ $\cos$, $\tan$ กับ $\cot$, $\sec$ กับ $\csc$ เมื่อมุมรวมกัน 90°

การจัดรูป มุมเงยและมุมก้ม และสามเหลี่ยมทั่วไป

ผลบวกและกำลังของไซน์-โคไซน์

กำหนด $s = \sin \theta + \cos \theta$ และ $p = \sin \theta \cos \theta$

$$s^2 = 1 + 2p, \quad (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2p$$

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = s(1 - p)$$

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2p^2$$

ถ้าทราบผลบวก ให้ยกกำลังสองหา p ก่อน แล้วใช้

เอกลักษณ์พหุนาม

$\sin^2 \theta$ หมายถึง $(\sin \theta)^2$ ไม่ใช่ $\sin(\theta^2)$

ผลบวกมุมและหน่วยเรเดียน

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

ใช้เมื่อแทนเจนต์และตัวส่วนทุกตัวมีความหมาย

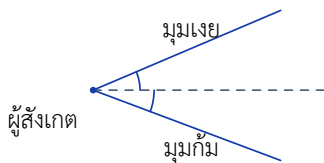
เรเดียนคืออัตราส่วนความยาวส่วนโค้ง L ต่อรัศมี r

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{L}{r}, \quad 180^\circ = \pi \text{ เรเดียน}$$

องศาเป็นเรเดียน: คูณ $\pi/180$

เรเดียนเป็นองศา: คูณ $180/\pi$

มุมเงย มุมก้ม และความสูง



วัดมุมจากแนวระดับสายตา ไม่ใช่จากแนวตั้ง

ถ้าระยะราบ d และมุมเงย θ ความสูงเหนือระดับตาเท่ากับ

$$h = d \tan \theta$$

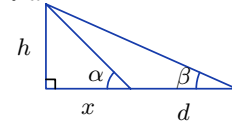
ความสูงวัตถุทั้งหมดต้องบวกความสูงระดับสายตาเมื่อจุดสังเกตไม่ได้อยู่ระดับฐาน

ผู้สังเกตสองตำแหน่ง

ฐานวัตถุและผู้สังเกตอยู่บนแนวเส้นตรงระดับเดียวกัน

มุมเงยตำแหน่งใกล้เป็น α ใกล้เป็น β โดย $\alpha > \beta$ ระยะ

ระหว่างตำแหน่งเป็น d



ให้ตำแหน่งใกล้ห่างฐาน x และความสูงเป็น h

$$h = x \tan \alpha = (x + d) \tan \beta$$

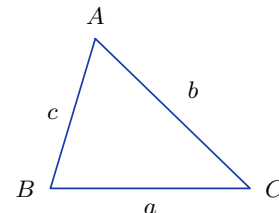
$$h = \frac{d \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

ถ้าอยู่คนละด้านของฐานและห่างกัน d

$$h = \frac{d \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

สามเหลี่ยมทั่วไปและกฎของไซน์

ใน $\triangle ABC$ กำหนด $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ คือด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R คือรัศมีวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

เมื่อทราบสองด้านกับมุมที่ไม่ใช่มุมระหว่างด้าน อาจมีได้สองรูป ต้องตรวจมุมและผลรวม 180°

กฎของโคไซน์และพื้นที่

ใช้สัญลักษณ์ด้านและมุมตามกรอบสามเหลี่ยมทั่วไป

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

มุมในสูตรพื้นที่ต้องเป็นมุมระหว่างสองด้านที่ใช้