

เส้นตรงและระบบสมการเชิงเส้น
เส้นตรงและความชัน

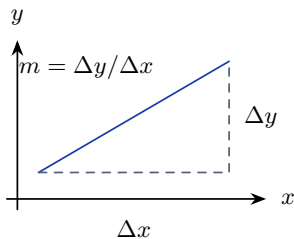
$$y = mx + c, \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m คือความชัน c คือจุดตัดแกน y และสูตรความชันใช้เมื่อ $x_2 \neq x_1$

เส้นผ่าน (x_1, y_1) มีสมการ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

เส้นแนวนอน $y = k$ มีความชัน 0 เส้นแนวตั้ง $x = k$ ไม่กำหนดความชัน


ขนานและตั้งฉาก

เส้นตรงที่มีความชันกำหนดได้

ขนานหรือเส้นเดียวกัน: $m_1 = m_2$

ตั้งฉาก: $m_1 m_2 = -1$

เส้นแนวตั้งตั้งฉากกับเส้นแนวนอน

ถ้าเขียน $ax + by = c$ และ $b \neq 0$ จะมี $m = -a/b$ โดย (a, b) ต้องไม่เป็น $(0, 0)$

ความหมายของคำตอบระบบ

คำตอบ (x, y) ต้องทำให้ทุกสมการในระบบเป็นจริงพร้อมกัน จึงเป็นจุดร่วมของกราฟ

ตัดกันหนึ่งจุด: คำตอบเดียว

ขนานและต่างเส้น: ไม่มีคำตอบ

เป็นเส้นเดียวกัน: คำตอบไม่จำกัดจำนวน

การตรวจคำตอบต้องแทนในทุกสมการเดิม

วิธีแทนค่าและกำจัดตัวแปร

แทนค่า: แยกตัวแปรจากสมการหนึ่ง แล้วแทนในอีกสมการ
กำจัดตัวแปรแรกและแทนกลับ

กำจัดตัวแปร: คูณสมการให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรหนึ่งเท่ากันหรือเป็นจำนวนตรงข้าม แล้วลบหรือบวกสมการ

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow 3x = 9$$

จึงได้ $x = 3, y = 1$

สมการที่มีเศษส่วนอาจคูณด้วยตัวส่วนร่วมก่อน โดยคงเงื่อนไขตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

สูตรคำตอบและการจำแนกระบบ

ให้ระบบเป็น

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

กำหนด

$$D = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$D_x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = a_1c_2 - a_2c_1$$

ถ้า $D \neq 0$ มีคำตอบเดียว

$$x = D_x/D, \quad y = D_y/D$$

ถ้า $D = 0$ ใช้การกำจัดตัวแปร: ได้ข้อความขัดแย้ง เช่น

$0 = 5$ แปลว่าไม่มีคำตอบ; ได้ $0 = 0$ และเหลือสมการเส้นตรงหนึ่งสมการ แปลว่าคำตอบไม่จำกัด

ถ้าสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นศูนย์ ต้องพิจารณาค่าคงตัวโดยตรง

พารามิเตอร์และสมการที่ไม่อิสระ

แยกกรณีที่สัมประสิทธิ์นำหรือตัวส่วนเป็นศูนย์ก่อนหาสมการหนึ่งเป็นผลคูณของอีกสมการทั้งสองข้าง จึงไม่เพิ่มเงื่อนไขใหม่

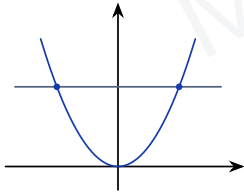
ถ้าด้านซ้ายเป็นผลคูณเดียวกันแต่ด้านขวาไม่สัมพันธ์กัน ระบบจะขัดแย้ง

ระบบไม่เชิงเส้นและการสร้างแบบจำลอง
เส้นตรงร่วมกับกำลังสอง

แทนค่าจากสมการเส้นตรงลงในสมการอีกเส้น จะได้สมการตัวแปรเดียว ซึ่งอาจเป็นกำลังสอง

แก้ทุกค่า x แล้วหาค่า y ที่สอดคล้องกัน ไม่จับคู่ค่า x, y ซ้ำมราก

จำนวนจุดร่วมอาจเป็น 0, 1, 2 เมื่อได้สมการกำลังสองที่สัมประสิทธิ์นำไม่เป็นศูนย์


ผลบวกและผลคูณของสองจำนวน

ให้ $S = x + y$ และ $P = xy$ จะได้

$$x^2 + y^2 = S^2 - 2P$$

$$(x - y)^2 = S^2 - 4P$$

$$x^3 + y^3 = S^3 - 3PS$$

$$x^4 + y^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

x, y เป็นรากของ $t^2 - St + P = 0$

มี x, y จริงเมื่อ $S^2 - 4P \geq 0$ หาก $x \neq y$ และเงื่อนไขสมมาตร อาจได้คู่อันดับทั้ง (x, y) และ (y, x)

การแทนตัวแปรในระบบ

ถ้า $1/x$ และ $1/y$ ปรากฏซ้ำ อาจแทน $u = 1/x, v = 1/y$ โดย $x, y \neq 0$ และ $u, v \neq 0$

ถ้าแทน $u = \sqrt{x}$ ต้องมี $u \geq 0$ และแทนกลับด้วย $x = u^2$ การยกกำลังสองหรือการคูณด้วยนิพจน์อาจทำให้เกิดคำตอบเกิน จึงต้องตรวจระบบเดิม

ระบบสามตัวแปร

กำจัดตัวแปรหนึ่งออกจากสมการสองคู่ เพื่อให้เหลือระบบสองตัวแปร แล้วแทนกลับ

กรณีผลบวกเป็นคู่

$$x + y = A, \quad y + z = B, \quad z + x = C$$

$$x = (A + C - B)/2$$

$$y = (A + B - C)/2$$

$$z = (B + C - A)/2$$

A, B, C คือค่าคงตัวที่กำหนด ไม่ใช่ตัวแปรเดิม

หากทราบ $S = x + y + z, T = xy + yz + zx$

$$x^2 + y^2 + z^2 = S^2 - 2T$$

ปริมาณ ราคา อายุ และเลขโดด

ให้ x, y เป็นจำนวนสิ่งของสองชนิด ราคา p, q ต่อหน่วย

จำนวนรวม N และราคารวม M

$$x + y = N, \quad px + qy = M$$

ปริมาณที่นับเป็นชิ้นต้องเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ

อายุผ่านไป t ปีต้องเพิ่ม t ให้ทุกคน ผลต่างอายุคงเดิม

จำนวนสองหลักที่มีหลักสิบ a และหลักหน่วย b คือ $10a + b$

โดย $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$

อัตราส่วนและการเคลื่อนที่

ถ้า $x : y = m : n$ อาจเขียน $x = mk, y = nk$ เพื่อลดจำนวนตัวแปร

ระยะทาง $s = vt$ โดยหน่วยของ s, v, t ต้องสัมพันธ์กัน

เมื่อเคลื่อนที่ทิศเดียวกันด้วยอัตราเร็วคงตัว $v_1 > v_2$ และเริ่มห่าง d

$$t = \frac{d}{v_1 - v_2}$$

เมื่อเคลื่อนที่เข้าหากัน ใช้ $t = d/(v_1 + v_2)$ หากเริ่มพร้อมกันและยังไม่ผ่านกัน