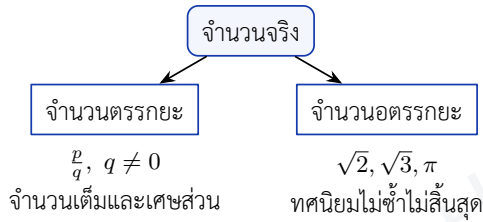


**ระบบจำนวน อสมการ และกรณฑ์**
**โครงสร้างของจำนวนจริง**


จำนวนตรรกยะเขียนเป็น  $p/q$  โดย  $p, q$  เป็นจำนวนเต็ม มีทศนิยมสิ้นสุดหรือทศนิยมซ้ำ

จำนวนอตรรกยะเขียนเป็นอัตราส่วนดังกล่าวไม่ได้ ผลบวกหรือผลคูณของอตรรกยะอาจเป็นตรรกยะได้

**ทศนิยมซ้ำเป็นเศษส่วน**

ทศนิยมซ้ำล้วน: ตัวเศษเป็นเลขในหนึ่งรอบซ้ำ ตัวส่วนเป็นเลข 9 เท่าจำนวนหลักในรอบ

$$0.\overline{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

ถ้ามีส่วนไม่ซ้ำ ให้ลบเลขก่อนเริ่มรอบออกจากเลขที่เขียนถึงจบรอบแรก

$$0.1\overline{6} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{1}{6}$$

ตัวส่วนมี 9 ตามจำนวนหลักซ้ำ ต่อด้วย 0 ตามจำนวนหลักไม่ซ้ำ

**อสมการและค่าสัมบูรณ์**

บวกหรือลบจำนวนเดียวกันคงที่คืออสมการ คูณหรือหารด้วยจำนวนลบต้องกลับทิศ

$|x - a|$  คือระยะระหว่าง  $x$  กับ  $a$  เมื่อ  $r > 0$

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$$

$$|x - a| > r \iff x < a - r \text{ หรือ } x > a + r$$

เปลี่ยน  $<$  เป็น  $\leq$  และ  $>$  เป็น  $\geq$  ได้ตามกรณี

$$|u + v| \leq |u| + |v| \text{ และ } |uv| = |u||v|$$

**รากและค่าหลักของกรณฑ์**

$\sqrt{a}$  คือจำนวนไม่ลบที่ยกกำลังสองแล้วได้  $a$  ต้องมี  $a \geq 0$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt[3]{a^3} = a$$

สมการ  $x^2 = a$  เมื่อ  $a > 0$  มีคำตอบสองค่า แต่สัญลักษณ์  $\sqrt{a}$  มีค่าเดียว

เมื่อ  $a, b \geq 0$  และตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

กรณฑ์อันดับคี่ใช้จำนวนจริงได้ทุกค่า แต่ยังห้ามตัวส่วนเป็นศูนย์

**การบวก คูณ และแยกตัวประกอบ**

ดึงกำลังสองสมบูรณ์ออกจากกรณฑ์ก่อน

$$\sqrt{m^2a} = |m|\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$$

รวมได้เฉพาะกรณฑ์ที่เหมือนกันหลังลดรูป

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

โดย  $a, b \geq 0$  และ  $\sqrt{a+b}$  ไม่เท่ากับ  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  โดยทั่วไป

**คู่สังยุคและการจัดตัวส่วน**

คู่สังยุคของ  $u + v$  คือ  $u - v$  ผลคูณเป็น  $u^2 - v^2$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

สูตรนี้ใช้เมื่อ  $a, b \geq 0, a \neq b$  หาก  $a = b > 0$  ให้

รวมตัวส่วนเป็น  $2\sqrt{a}$  ก่อน

สำหรับ  $a, b \geq 0$  ตัวส่วนผลต่างใช้ได้เมื่อ  $a \neq b$

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

คูณทั้งเศษและส่วนด้วยพจน์เดียวกันที่ไม่เป็นศูนย์

**การลดรูป สมการ และนิพจน์ต่อเนื่อง**
**กรณีข้อ**

หา  $u, v \geq 0$  ที่ทำให้  $u + v = A$  และ  $uv = B$

$$\sqrt{A + 2\sqrt{B}} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$$

$$\sqrt{A - 2\sqrt{B}} = |\sqrt{u} - \sqrt{v}|$$

เช่น  $u + v = 7$ ,  $uv = 12$  ได้  $u = 4, v = 3$

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

สำหรับรูปผลต่างต้องตรวจค่าบวกของราก เช่น

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

**สมการที่มีกรณี**

กำหนดโดเมน  $\rightarrow$  แยกกรณี  $\rightarrow$  ยกกำลัง  $\rightarrow$  แก้สมการ  $\rightarrow$  ตรวจในสมการเดิม

ถ้า  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  ต้องมีทั้ง  $f(x) \geq 0$  และ  $g(x) \geq 0$  ก่อน  
ใช้  $f(x) = g(x)^2$

ตัวอย่าง  $\sqrt{x+2} = x$  ต้องมี  $x \geq 0$

$$x + 2 = x^2 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

ตรวจแล้วเหลือ  $x = 2$  ส่วน  $x = -1$  ไม่ผ่านเงื่อนไข

หากนิพจน์เดิมปรากฏซ้ำ อาจแทน  $t = \sqrt{f(x)}$  โดยต้องเก็บเงื่อนไข  $t \geq 0$

**ขอบเขตและค่าสุดขีด**

สำหรับจำนวนจริง  $u, v$

$$(u - v)^2 \geq 0 \Rightarrow u^2 + v^2 \geq 2uv$$

เมื่อ  $u, v \geq 0$

$$u + v \geq 2\sqrt{uv}$$

เท่ากันเมื่อ  $u = v$  ดังนั้นผลบวกคงที่  $u + v = S$  ให้

$$uv \leq S^2/4$$

เมื่อหาค่าสุดขีด ต้องตรวจว่าค่าที่ทำให้เท่ากันอยู่ในโดเมนของโจทย์ด้วย

**ผลบวกและผลคูณที่ตัดทอน**

$\Sigma$  คือผลบวก และ  $\Pi$  คือผลคูณตามดัชนี

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ถ้า  $u_1, \dots, u_{n+1}$  ไม่เป็นศูนย์

$$\frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdots \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_1}$$

ให้เขียนพจน์ต้นและพจน์ท้ายก่อนตัดทอน เพื่อไม่ให้ตกหล่น

**เศษส่วนต่อเนื่องและกรณีข้อต่อเนื่อง**

เมื่อโจทย์กำหนดว่านิพจน์ต่อเนื่องมีค่าบวกแน่นอน และส่วนที่ซ้ำมีค่าเดียวกับนิพจน์ทั้งหมด จึงแทนตัวแปรได้

$$x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$$

$$x = \sqrt{a + x} \Rightarrow x^2 - x - a = 0$$

สำหรับ  $a > 0$  เลือกรากบวก  $x = (1 + \sqrt{1 + 4a})/2$

กรณีแบบผลคูณ

$$x = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\cdots}}} \Rightarrow x^2 = ax$$

เมื่อ  $a > 0$  และกำหนดค่าบวก จะได้  $x = a$

สมการที่ได้เป็นเงื่อนไขจำเป็น ต้องเลือกคำตอบตามความหมายของนิพจน์เดิม

**นิยามการดำเนินการใหม่**

หากกำหนด  $a * b = f(a, b)$  เครื่องหมาย  $*$  ต้องใช้ตามนิยาม ไม่ใช่การคูณโดยอัตโนมัติ

เช่น  $a * b = a + 2b$  จะมี  $2 * 3 = 8$  แต่  $3 * 2 = 7$  จึงสลับที่ไม่ได้

ตรวจลำดับวงเล็บ เงื่อนไขตัวส่วน และขอบเขตของกรณีทุกครั้ง