

วิธีแก้สมการและจำนวนคำตอบ
รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

a, b, c เป็นค่าคงตัวจริง x เป็นตัวแปร
จัดสมการให้ข้างหนึ่งเป็นศูนย์ แล้วใช้

$$UV = 0 \iff U = 0 \text{ หรือ } V = 0$$

$$x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q)$$

เช่น $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$

ตอบ $x = 2$ หรือ $x = 3$

การถอดรากและทำกำลังสองสมบูรณ์

$$(x-h)^2 = k$$

$k > 0$: $x = h + \sqrt{k}$ หรือ $x = h - \sqrt{k}$

$k = 0$: $x = h$ $k < 0$: ไม่มีคำตอบจริง

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์นำเป็น $a \neq 0$ ให้หารสมการทั้งสองข้างด้วย a ก่อน หรือดึง a จากพจน์กำลังสองและกำลังหนึ่ง

สูตรคำตอบทั่วไป

กำหนด $\Delta = b^2 - 4ac$ สำหรับ $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

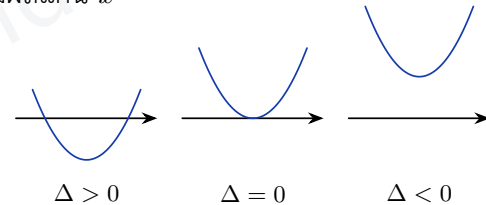
ใช้ในจำนวนจริงเมื่อ $\Delta \geq 0$

Δ	คำตอบจริง
$\Delta > 0$	สองค่าที่แตกต่างกัน
$\Delta = 0$	ค่าเดียว มีรากซ้ำ
$\Delta < 0$	ไม่มี

ถ้าสัมประสิทธิ์เป็นพารามิเตอร์ ต้องแยกกรณี $a = 0$ ก่อนใช้สูตร

ภาพความสัมพันธ์กับกราฟ

คำตอบของสมการคือพิกัด x ที่กราฟ $y = ax^2 + bx + c$ ตัดหรือสัมผัสแกน x



ภาพแสดงกรณี $a > 0$ จำนวนจุดตัดใช้เกณฑ์เดียวกันเมื่อ $a < 0$

เงื่อนไขของรากจริง

ให้ $S = -b/a$, $P = c/a$ เป็นผลบวกและผลคูณของราก
รากต่างเครื่องหมาย $\iff P < 0$

รากจริงทั้งคู่เป็นบวก: $\Delta \geq 0$, $S > 0$, $P > 0$

รากจริงทั้งคู่เป็นลบ: $\Delta \geq 0$, $S < 0$, $P > 0$

มีรากเป็นศูนย์ $\iff c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

ถ้า $a = 0$ เหลือ $bx + c = 0$: $b \neq 0$ ได้ $x = -c/b$;

$b = 0, c \neq 0$ ไม่มีคำตอบ; $b = c = 0$ ได้ทุกจำนวนจริง

สมการเศษส่วนและสมการกรณฑ์

ตัวส่วนทุกตัวในสมการเดิมต้องไม่เป็นศูนย์ คูณด้วยตัวส่วนร่วมแล้วแก้สมการ โดยคงเงื่อนไขเดิม
กรณี $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ต้องมี $f(x) \geq 0$ และ $g(x) \geq 0$ ก่อนยกกำลังสอง

ค่าที่ได้จากสมการหลังจัดรูปต้องแทนตรวจในสมการเดิมเพื่อคัดคำตอบเกินหรือค่าที่ทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์

ความสัมพันธ์ของรากและการลดรูป
ผลบวกและผลคูณของราก

ถ้า α, β เป็นรากของ $ax^2 + bx + c = 0$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$(\alpha - \beta)^2 = S^2 - 4P$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

เมื่อ $P \neq 0$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P}$$

รากจริงให้ $|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P}$

การสร้างสมการจากราก

ถ้ารากมีผลบวก S และผลคูณ P สมการหนึ่งคือ

$$x^2 - Sx + P = 0$$

รากใหม่ $\alpha + t, \beta + t$ มีผลบวก $S + 2t$ และผลคูณ $P + tS + t^2$

รากใหม่ $k\alpha, k\beta$ มีผลบวก kS และผลคูณ k^2P

รากใหม่ $1/\alpha, 1/\beta$ ใช้ได้เมื่อ $P \neq 0$ มีผลบวก S/P และผลคูณ $1/P$

สมการที่ลดเป็นกำลังสอง

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \longrightarrow \quad at^2 + bt + c = 0$$

แทน $t = x^2 \geq 0$ แล้วพิจารณาแต่ละค่า t

$t > 0$: $x = \pm\sqrt{t}$ $t = 0$: $x = 0$

$t < 0$: ไม่ให้คำตอบจริงของ x

ถ้าแทน $t = x^2 + px$ ต้องแก้ $x^2 + px - t = 0$ กลับอีกครั้ง โดยตรวจ $p^2 + 4t \geq 0$

ความสัมพันธ์ของรากดีกรีสูง

ถ้า α, β, γ เป็นรากของ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ นับตามจำนวนซ้ำ

$$S = \alpha + \beta + \gamma = -b/a$$

$$T = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = c/a$$

$$P = \alpha\beta\gamma = -d/a$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = S^2 - 2T$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = S^3 - 3ST + 3P$$

รูปทั่วไป $a_nx^n + \dots + a_0 = 0$ เมื่อ $a_n \neq 0$ และนับรากตามจำนวนซ้ำ

$$\sum r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \prod r_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

การตั้งสมการจากสถานการณ์

กำหนดตัวแปรพร้อมหน่วย แปลเงื่อนไขเป็นสมการ แล้วตัดคำตอบให้ตรงความหมาย เช่น ความยาวและเวลาต้องเป็นบวก

พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า: $\text{Area} = lw$

การเคลื่อนที่: $s = vt$ โดย s คือระยะทาง v คืออัตราเร็ว t คือเวลา

ทำงานร่วมกัน: ถ้าทำลำพังเสร็จในเวลา t_1, t_2 และร่วมกันเสร็จในเวลา T

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$$

สูตรนี้ใช้เมื่ออัตราการทำงานคงที่และช่วยกันทำงานชนิดเดียวกัน

ลำดับการพิจารณา

จัดรูป $\rightarrow$ ระบุดอเมน $\rightarrow$ เลือกวิธีแก้ $\rightarrow$ แทนกลับ $\rightarrow$ ตรวจสอบคำตอบ

อย่าหารสมการด้วย x หรือพจน์ที่อาจเป็นศูนย์ เพราะอาจทำให้รากหาย

สมการกำลังสองมีรากจริงได้ไม่เกินสองค่าที่แตกต่างกัน แต่สมการดีกรีสูงที่ลดรูปอาจให้คำตอบของตัวแปรเดิมมากกว่าสองค่า