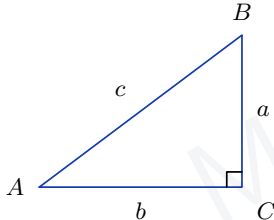


สามเหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่ และเส้นสูง

ทฤษฎีบทและสัญลักษณ์ด้าน

ใน $\triangle ABC$ ให้ $C = 90^\circ$ กำหนด
 $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ ดังนั้น c คือด้านฉาก



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

c ยาวที่สุด และความยาวทุกด้านเป็นบวก
ผลรวมพื้นที่จัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก เท่ากับพื้นที่
จัตุรัสบนด้านฉาก

บทกลับและชนิดของสามเหลี่ยม

ให้ c เป็นด้านยาวที่สุด และ $a + b > c$

$c^2 = a^2 + b^2$: สามเหลี่ยมมุมฉาก

$c^2 < a^2 + b^2$: สามเหลี่ยมมุมแหลม

$c^2 > a^2 + b^2$: สามเหลี่ยมมุมป้าน

ต้องตรวจเงื่อนไขสร้างสามเหลี่ยมก่อนจำแนก

ชุดจำนวนพีทาโกรัส

ชุดที่ใช้บ่อย (a, b, c) ได้แก่

$(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(7, 24, 25)$

คูณทุกด้านด้วย $k > 0$ ยังได้สามเหลี่ยมมุมฉาก

สำหรับจำนวนเต็ม $m > n > 0$

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

จะมี $a^2 + b^2 = c^2$ เสมอ

พื้นที่และเส้นสูง

สำหรับสามเหลี่ยมมุมฉากที่ด้านประกอบมุมฉากยาว a, b
และด้านฉากยาว c

$$\text{Area} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch, \quad h = \frac{ab}{c}$$

h คือเส้นสูงจากมุมฉากถึงด้านฉาก

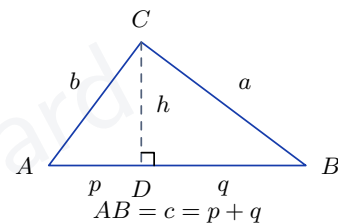
ถ้ากำหนดอัตราส่วน $a : b = m : n$ ให้เขียน

$a = mt$, $b = nt$ แล้วใช้พื้นที่หรือความยาวเพื่อหา $t > 0$

เส้นสูงแบ่งด้านฉาก

ในรูป $C = 90^\circ$, $CD \perp AB$ ให้

$AD = p$, $DB = q$, $CD = h$, $AB = c$



$$c = p + q \quad h^2 = pq$$

$$b^2 = cp \quad a^2 = cq$$

$$h = ab/c$$

ความสัมพันธ์เกิดจากสามเหลี่ยมคล้าย จึงต้องใช้ p, q ให้ตรงกับด้านที่อยู่ประชิด

สามเหลี่ยมหน้าจั่วและด้านเท่า

หน้าจั่วด้านเท่ายาว s ฐานยาว b : เส้นสูงแบ่งฐานเป็น $b/2$

$$h = \sqrt{s^2 - \frac{b^2}{4}}, \quad \text{Area} = \frac{1}{2}bh$$

ด้านเท่าด้านยาว s :

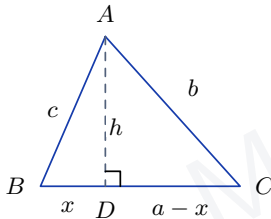
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s, \quad \text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

มุมฉากหน้าจั่วด้านประกอบมุมฉากยาว s มีด้านฉาก $s\sqrt{2}$

การสร้างรูป ระยะทาง และรูปทรงสามมิติ

หาความสูงจากความยาวสามด้าน

ให้ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ และลาก $AD \perp BC$
กำหนดระยะพิกิต $BD = x$ ตามทิศจาก B ไป C



$$x^2 + h^2 = c^2, \quad (a - x)^2 + h^2 = b^2$$

ลบสองสมการเพื่อกำจัด h^2

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}, \quad h = \sqrt{c^2 - x^2}$$

หาก $x < 0$ หรือ $x > a$ จุดตั้งฉากอยู่นอกส่วนของฐาน ต้อง
วาดส่วนต่อให้ตรงตำแหน่ง

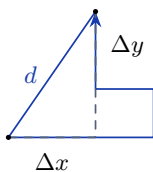
พื้นที่คือ $\text{Area} = ah/2$

ระยะตรงกับระยะตามเส้นทาง

รวมการเปลี่ยนตำแหน่งในแต่ละแกนก่อน แล้วสร้าง
สามเหลี่ยมมุมฉาก

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$\Delta x, \Delta y$ คือผลต่างพิกิตปลายกับต้น ไม่ใช่ผลลบระยะเดิน
ทั้งหมด



สามเหลี่ยมมุมฉากต่อเนื่อง

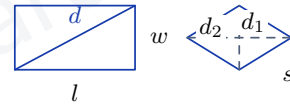
ถ้าเพิ่มด้านตั้งฉากยาว s ในแต่ละขั้น

$$r_{n+1}^2 = r_n^2 + s^2$$

หลังเพิ่ม n ขั้น จะมี $r_n^2 = r_0^2 + ns^2$ โดย r_0 คือความยาว
เริ่มต้น

ต้องตรวจมุมฉากของแต่ละขั้น ไม่รวมกำลังสองของด้านที่ไม่
ได้ตั้งฉากกัน

สี่เหลี่ยมและเส้นทแยงมุม



สี่เหลี่ยมผืนผ้าด้านยาว l, w :

$$d = \sqrt{l^2 + w^2}$$

จัตุรัสด้าน s : $d = s\sqrt{2}$

ขนมเปียกปูนเส้นทแยงมุม d_1, d_2 ตั้งฉากและแบ่งครึ่งกัน

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \quad \text{Area} = \frac{1}{2}d_1d_2$$

เมื่อ s คือความยาวด้านของขนมเปียกปูน

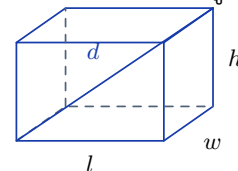
จุด P ใด ๆ ในระนาบของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ มี

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

โดย A, C และ B, D เป็นมุมตรงข้าม

เส้นทแยงมุมภายในกล่อง

กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง w ยาว l สูง h



$$d^2 = l^2 + w^2 + h^2, \quad V = lwh$$

ลูกบาศก์ด้าน s มี $d = s\sqrt{3}$

ถ้าเส้นทแยงมุมของหน้าสามหน้าที่ติดกันยาว p, q, r

$$d^2 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{2}$$

เพราะกำลังสองของแต่ละมิติปรากฏในผลรวมสองครั้ง

แนวทางเลือกรูปช่วย

ระบุด้านที่ถาม → หามุมฉาก → กำหนดด้านฉาก → เขียน
สมการกำลังสอง

หากรูปยังไม่มีมุมฉาก อาจลากเส้นสูง เส้นทแยงมุม หรือเส้น
ขนานกับแกน เพื่อสร้างรูปที่ใช่ทฤษฎีบทได้

ใช้รากบวกสำหรับความยาว และตรวจหน่วยก่อนแทนค่า