

หลักการนับ การเลือก และการจัดเรียง
แฟกทอเรียลและหลักการนับ

$n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ

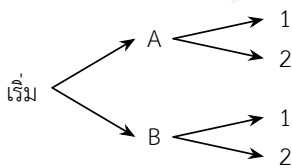
$0! = 1$

ทำงานต่อเนื่อง k ขั้น แต่ละขั้นมี $n_1, \dots, n_k$ ทางเลือก ใช้หลักคูณ

$$N = n_1 n_2 \cdots n_k$$

แบ่งเป็นกรณีที่ไม่ซ้ำกัน ใช้หลักบวก

แผนภาพต้นไม้ต้องแสดงทางเลือกแต่ละขั้นครบ



ได้ $2 \times 2 = 4$ ผลลัพธ์ ได้แก่ A1, A2, B1, B2

การเลือกและการเรียง

สิ่งของต่างกัน n ชิ้น เลือก r ชิ้น โดย $0 \leq r \leq n$

ไม่สนใจลำดับ:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

สนใจลำดับและไม่ซ้ำ:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n}{r} r!$$

เลือกเป็นลำดับ r ครั้งและซ้ำได้: n^r

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ และเลือกหลายประเภทให้คุณจำนวนวิธีของแต่ละประเภท

พหุคูณ อย่างน้อย และอย่างมาก

พหุคูณ r : นับกรณีนั้นโดยตรง

อย่างน้อย r : รวมตั้งแต่ r ขึ้นไป หรือทั้งหมดลบกรณีน้อยกว่า r

อย่างมาก r : รวมตั้งแต่ศูนย์ถึง r

อย่างน้อยหนึ่ง = ทั้งหมด - ไม่มีเลย

แต่ละกรณีต้องไม่ซ้ำกันก่อนบวกจำนวนวิธี

ติดกัน ไม่ติดกัน และสิ่งของซ้ำ

สิ่งของต่างกัน n ชิ้น กำหนด k ชิ้นต้องติดกัน: มัดเป็นหนึ่งหน่วย เหลือ $n-k+1$ หน่วย

$$(n-k+1)! k!$$

$k!$ ใช้เมื่อสลับภายในกลุ่มได้ทุกแบบ

ไม่ติดกัน: เรียงกลุ่มอื่นก่อน แล้วเลือกช่องว่างที่มี รวมช่องปลายสองข้าง

เรียง n ชิ้นที่มีชนิดซ้ำจำนวน $n_1, \dots, n_t$

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_t!}, \quad \sum n_i = n$$

รอบวงและการพลิก

ของต่างกัน n ชิ้น เรียงรอบวง โดยการหมุนถือว่าเหมือนกัน

$$(n-1)!$$

ถ้าพลิกกลับถือว่าเหมือนกันด้วย เช่น สร้อยที่ไม่มีด้าน

หน้า-หลัง ใช้ $(n-1)!/2$ เมื่อ $n \geq 3$

ถ้าตำแหน่งมีหมายเลขกำกับ การหมุนอาจถือว่าต่างกัน ต้องอ่านเงื่อนไข

ของซ้ำหรือสีซ้ำอาจมีสมมาตรต่างกัน จึงหารด้วย n หรือ 2 โดยอัตโนมัติไม่ได้

แจกกล่องและเพิ่มเข้า-ตัดออก

ของต่างกัน n ชิ้น ลงกล่องมีชื่อ k กล่อง: k^n วิธี

หากต้องใช้ทุกกล่อง สำหรับ $n, k \geq 1$

$$N = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

เริ่มจากทั้งหมด ลบกรณีว่างอย่างน้อยกล่องหนึ่ง บวกคืน

กรณีที่ลบซ้ำ แล้วสลับเครื่องหมาย

3 กล่อง: $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$

4 กล่อง: $4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4$

กลุ่มสองกลุ่ม: จำนวนที่อยู่ในอย่างน้อยหนึ่งกลุ่ม = กลุ่มแรก + กลุ่มสอง - ส่วนร่วม

ความน่าจะเป็น วิธีหีบ และการนับประยุกต์
นิยามความน่าจะเป็น

ถ้าผลลัพธ์ย่อยทุกแบบมีโอกาสเท่ากัน

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

S คือผลลัพธ์ทั้งหมด E คือเหตุการณ์ที่สนใจ n คือจำนวนผลลัพธ์ โดย $n(S) > 0$

$0 \leq P(E) \leq 1$ และ $P(\text{ไม่เกิด } E) = 1 - P(E)$

ผลรวมลูกเต๋าสองลูกไม่ได้มีโอกาสเท่ากันทุกค่า ต้องนับจากคูหน้าเต๋า 36 คู

คำว่า หรือ และเหตุการณ์อิสระ

$$P(A \text{ หรือ } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ และ } B)$$

ถ้าเกิดพร้อมกันไม่ได้ ส่วนรวมเป็นศูนย์

ถ้าเหตุการณ์อิสระ ผลของเหตุการณ์หนึ่งไม่เปลี่ยนโอกาสของอีกเหตุการณ์

$$P(A \text{ และ } B) = P(A)P(B)$$

เหตุการณ์อิสระไม่ใช่สิ่งเดียวกับเหตุการณ์ที่เกิดพร้อมกันไม่ได้

ในต้นไม้ คูณโอกาสตามเส้นทาง แล้วบวกโอกาสของเส้นทางที่ไม่ซ้ำกันและตรงเงื่อนไข

หีบใส่คืน ไม่ใส่คืน และพร้อมกัน

มีของ N ชิ้น เป็นชนิดที่สนใจ K ชิ้น หีบทีละชิ้น โดยแต่ละชิ้นมีโอกาสถูกหีบเท่ากัน

ใส่คืนทุกครั้ง: โอกาสชนิดที่สนใจยังเป็น K/N และผลแต่ละครั้งอิสระเมื่อวิธีสุ่มไม่เปลี่ยน

ไม่ใส่คืน: จำนวนทั้งหมดและจำนวนชนิดที่สนใจเปลี่ยนตามผลก่อนหน้า

โอกาสได้ชนิดที่สนใจสองครั้ง:

$$\text{ใส่คืน: } \left(\frac{K}{N}\right)^2$$

$$\text{ไม่ใส่คืน: } \frac{K}{N} \frac{K-1}{N-1}$$

สูตรหลังใช้เมื่อ $N \geq 2$ และคำนึงถึงจำนวนที่มีจริง

หีบพร้อมกันและพหุคูณตามจำนวน

หีบ r ชิ้นจาก N ชิ้น มีชนิดที่สนใจ K ชิ้น ต้องการชนิดนั้นพหุคูณ t ชิ้น

$$P = \frac{\binom{K}{t} \binom{N-K}{r-t}}{\binom{N}{r}}$$

โดย $0 \leq t \leq K, 0 \leq r-t \leq N-K$

ถ้าใส่คืนและแต่ละครั้งมีโอกาสสำเร็จ p คงที่ อิสระกัน r ครั้ง ต้องการสำเร็จ t ครั้ง

$$P = \binom{r}{t} p^t (1-p)^{r-t}$$

นับเศษและส่วนให้ใช้ลำดับแบบเดียวกัน ไม่ใช่กลุ่มไม่เรียงในเศษแล้วใช้ลำดับในส่วน

หลักเรียงนกพิราบ

ของ N ชิ้นลง k กล่อง ต้องมีกล่องหนึ่งมีอย่างน้อย $\lceil N/k \rceil$ ชิ้น

รับประกันว่ามีอย่างน้อย r ชิ้นในกล่องเดียว ต้องมีมากกว่า $k(r-1) + 1$ ชิ้น

$\lceil x \rceil$ คือจำนวนเต็มทีน้อยที่สุดซึ่งไม่น้อยกว่า x เช่น

$$\lceil 2.1 \rceil = 3$$

ถ้ากล่องแต่ละใบรับได้ไม่เกิน c_i ชิ้น การมีของ $\sum c_i + 1$ ชิ้น บังคับให้เกิดความจุอย่างน้อยหนึ่งกล่อง

การนับรูปและลูกบาศก์

n จุดที่ไม่มีสามจุดอยู่แนวเส้นตรงเดียวกัน: เส้นเชื่อม $\binom{n}{2}$ เส้น สามเหลี่ยม $\binom{n}{3}$ รูป

รูปหลายเหลี่ยมมุม n ด้าน มีเส้นทแยงมุม $n(n-3)/2$ เส้น เส้นตั้ง m เส้น เส้นนอน n เส้น สร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้า $\binom{m}{2} \binom{n}{2}$ รูป

ลูกบาศก์ทาสีภายนอกทุกหน้าแล้วแบ่งด้านละ n ส่วนเท่ากัน ($n \geq 2$)

ติดสี 3 หน้า: 8 ก้อน

ติดสี 2 หน้า: $12(n-2)$ ก้อน

ติดสี 1 หน้า: $6(n-2)^2$ ก้อน

ไม่ติดสี: $(n-2)^3$ ก้อน รวมทั้งหมด n^3