

โครงสร้าง เอกลักษณ์ และการแยกตัวประกอบ
เอกนามและพหุนาม

เอกนามมีเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ ดีกรีคือผลบวกเลขชี้กำลังในพจน์ที่ไม่เป็นศูนย์ พจน์คล้ายต้องมีตัวแปรและเลขชี้กำลังตรงกัน จึงรวมสัมประสิทธิ์ได้ พหุนามตัวแปรเดียวรูปทั่วไป

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

$a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ ดีกรีคือ n โดยพหุนามศูนย์ไม่กำหนดดีกรี

เอกลักษณ์กำลังสอง

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

b	ab	b ²
	a ²	ab
a		

ภาพสำหรับ $a, b > 0$ แสดงพื้นที่ $(a + b)^2$

เอกลักษณ์กำลังสาม

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

ใช้กับจำนวนหรือนิพจน์ โดยแทนทั้งกลุ่มลงใน a, b ให้ครบ

การดำเนินการของพหุนาม

การบวกและลบ: รวมสัมประสิทธิ์เฉพาะพจน์คล้าย การลบวงเล็บต้องเปลี่ยนเครื่องหมายทุกพจน์ในวงเล็บ การคูณ: แจกแจงทุกพจน์ของวงเล็บหนึ่งไปคูณทุกพจน์ของอีกวงเล็บ แล้วรวมพจน์คล้าย

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

ทวินามและพจน์ทั่วไป

สำหรับจำนวนเต็มไม่ลบ n

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

พจน์ที่ $r + 1$ เมื่อ $0 \leq r \leq n$ คือ

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

กรณี $(a - b)^n$ แทน b ด้วย $-b$ เครื่องหมายจึงสลับตามกำลังของ b

การแยกตัวประกอบ

เริ่มจากตัวประกอบร่วม แล้วพิจารณาการจัดกลุ่มหรือเอกลักษณ์

$$ax + ay = a(x + y)$$

$$x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q)$$

สำหรับ $ax^2 + bx + c$ อาจแยกพจน์กลางโดยเลือก

$$m + n = b, \quad mn = ac \text{ แล้วจัดกลุ่ม}$$

หากมีนิพจน์ซ้ำ ให้แทนเป็นตัวแปรเดียว แยกตัวประกอบ แล้วแทนกลับ

เติมและลบพจน์เดิม

การเติมพจน์ต้องลบพจน์เดียวกัน เพื่อรักษาค่า

$$\begin{aligned} x^4 + 4a^4 &= (x^2 + 2a^2)^2 - (2ax)^2 \\ &= (x^2 + 2a^2 - 2ax) \cdot (x^2 + 2a^2 + 2ax) \end{aligned}$$

ขั้นแรกเติม $4a^2x^2$ แล้วลบ $4a^2x^2$ จากนั้นใช้ผลต่างกำลังสอง

สามเหลี่ยมปาสคาล

		1		
	1	1		
	1	2	1	
	1	3	3	1
1	4	6	4	1

แถวที่เริ่มด้วย 1 เพียงตัวเดียวใช้กับ $n = 0$ แต่ละจำนวนภายในแถวเท่ากับผลบวกสองจำนวนเหนือมัน และเป็นสัมประสิทธิ์ของ $(a + b)^n$

การหาร เศษเหลือ และการประยุกต์
การหารพหุนาม

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

P คือตัวตั้ง $D \neq 0$ คือตัวหาร Q คือผลหาร และ R คือเศษ โดย $\deg R < \deg D$ หรือ $R = 0$

หารยาว: เรียงกำลัง $\rightarrow$ หารพจน์นำ $\rightarrow$ คูณกลับ $\rightarrow$ ลบ $\rightarrow$ ทำซ้ำ

กำลังที่ขาดต้องเติมสัมประสิทธิ์ 0 ในการหารสังเคราะห์

ทฤษฎีบทเศษเหลือและตัวประกอบ

หารด้วย $x - c$ ได้เศษ $P(c)$

หารด้วย $ax - b$ เมื่อ $a \neq 0$ ได้เศษ $P(b/a)$

$$P(c) = 0 \iff x - c \text{ เป็นตัวประกอบของ } P(x)$$

หารด้วย $(x - u)(x - v)$ เมื่อ $u \neq v$ ให้เศษ $mx + n$ แล้วใช้

$$mu + n = P(u), \quad mv + n = P(v)$$

$P(0)$ คือพจน์คงตัว $P(1)$ คือผลบวกสัมประสิทธิ์ ส่วน

$P(-1)$ คือผลบวกสัมประสิทธิ์กำลังคู่ลบกำลังคี่

เศษส่วนพหุนาม

กำหนดตัวส่วนเดิมไม่เป็นศูนย์ก่อนตัดทอน

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B, C \neq 0)$$

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \quad (B, D \neq 0)$$

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC} \quad (B, C, D \neq 0)$$

แม้ตัดตัวประกอบ C ออกแล้ว ต้องคงเงื่อนไข $C \neq 0$ จาก

นิพจน์เดิม

การแยกเศษส่วนย่อย เช่น

$$\frac{1}{(x-u)(x-v)} = \frac{1}{u-v} \left(\frac{1}{x-u} - \frac{1}{x-v} \right)$$

เมื่อ $u \neq v$ และ $x \neq u, v$

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์

หาร $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ด้วย $x - 1$ ใช้ค่า 1

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

ผลหารคือ $x^2 - 5x + 6$ และเศษ 0 ตัวสุดท้ายของแถวล่างคือเศษ

กำลังสองสมบูรณ์และค่าสุดขีด

เมื่อ $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

ถ้า $a > 0$ มีค่าต่ำสุด $c - b^2/(4a)$ ถ้า $a < 0$ มีค่าสูงสุดเท่าค่านั้น เมื่อ $x = -b/(2a)$ อยู่ในโดเมน

จำนวนจริงยกกำลังสองไม่เป็นลบ ดังนั้น

$$U^2 + V^2 = 0 \iff U = V = 0$$

นิพจน์สมมาตรและส่วนกลับ

ให้ $S = u + v$, $P = uv$

$$u^2 + v^2 = S^2 - 2P$$

$$u^3 + v^3 = S^3 - 3PS$$

$$u^4 + v^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

เมื่อ $x \neq 0$ และ $t = x + 1/x$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$$

เอกลักษณ์สามตัวแปร

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw$$

$$= (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu)$$

สมการและรากของพหุนาม

$$UV = 0 \iff U = 0 \text{ หรือ } V = 0$$

ย้ายทุกพจน์ไปข้างเดียวก่อนแยกตัวประกอบ ไม่หารด้วยตัวแปรที่อาจเป็นศูนย์

พหุนามดีกรี n ที่มีราก $r_1, \dots, r_n$ นับตามจำนวนซ้ำ และสัมประสิทธิ์นำ a เขียนเป็น

$$P(x) = a(x - r_1) \cdots (x - r_n)$$

ถ้าแทน $t = x^2$ ต้องมี $t \geq 0$ และแทนกลับเพื่อหาค่า x ทุกค่าที่เป็นไปได้

เอกลักษณ์และการเทียบสัมประสิทธิ์

ถ้าพหุนามสองข้างเท่ากันสำหรับทุกค่า x สัมประสิทธิ์ของกำลังเดียวกันต้องเท่ากัน

เช่น $Ax^2 + Bx + C = 2x^2 - 3x + 1$ เป็นเอกลักษณ์ จึงมี $A = 2$, $B = -3$, $C = 1$

ถ้าเท่ากันเฉพาะบางค่า x จะเทียบสัมประสิทธิ์โดยตรงไม่ได้