

รูปสมการ จุดยอด และจุดตัดแกน
ฟังก์ชันกำลังสองและทิศการเปิด

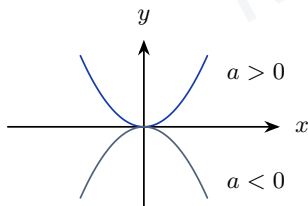
$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

a, b, c เป็นค่าคงตัวจริง กราฟเป็นพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน y

$a > 0$: กราฟหงาย มีค่าต่ำสุด

$a < 0$: กราฟคว่ำ มีค่าสูงสุด

เมื่อจุดยอดเท่ากัน $|a|$ มากขึ้น กราฟแคบลง


รูปจุดยอด

$$y = a(x - h)^2 + k$$

จุดยอด (h, k) แกนสมมาตร $x = h$

เมื่อ $a > 0$: พิสูจน์ $y \geq k$

เมื่อ $a < 0$: พิสูจน์ $y \leq k$

โดเมนของฟังก์ชันกำลังสองทั่วไปคือจำนวนจริง

$$y - k = a(x - h)^2$$

จุดที่อยู่ห่างแกนสมมาตรเท่ากันมีค่า y เท่ากัน จึงมี

$$x_1 + x_2 = 2h$$

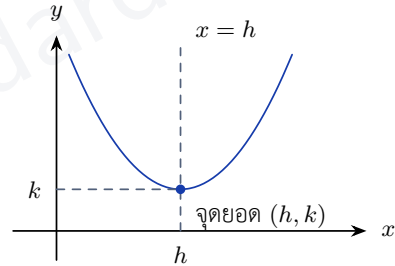
จุดยอดจากสัมประสิทธิ์

$$\text{กำหนด } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

การทำกำลังสองสมบูรณ์แสดงตำแหน่งจุดยอดและค่าสูงสุดหรือต่ำสุดโดยตรง

ส่วนประกอบและการเลื่อนกราฟ


$y = a(x - h)^2 + k$ ได้จาก $y = ax^2$ เลื่อนแนวนอน h หน่วย และแนวตั้ง k หน่วย ตามเครื่องหมาย
เช่น $y = 2(x - 3)^2 - 1$ เลื่อนขวา 3 และลง 1

จุดตัดแกนพิกัด

แกน y : แทน $x = 0$ ได้ $(0, c)$

แกน x : แทน $y = 0$ แล้วแก้สมการกำลังสอง

$\Delta > 0$ ตัดแกน x สองจุด

$\Delta = 0$ สัมผัสแกน x หนึ่งจุด

$\Delta < 0$ ไม่ตัดแกน x

ถ้ารากจริงคือ r_1, r_2 เขียนได้เป็น

$$y = a(x - r_1)(x - r_2), \quad h = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

เครื่องหมายของฟังก์ชัน

เมื่อมีรากต่างกัน $r_1 < r_2$

ถ้า $a > 0$: $y > 0$ นอกราก และ $y < 0$ ระหว่างราก

ถ้า $a < 0$: เครื่องหมายกลับกัน

เมื่อ $\Delta = 0$ เครื่องหมายเหมือน a ยกเว้นที่รากซึ่งค่าเป็นศูนย์

เมื่อ $\Delta < 0$ เครื่องหมายเหมือน a ทุกค่า x

การสร้างสมการ จุดร่วม และค่าสุดขีด
เลือกใช้รูปสมการจากข้อมูล

 ทราบจุดยอด: ใช้ $y = a(x - h)^2 + k$

 ทราบจุดตัดแกน x สองจุด: ใช้ $y = a(x - r_1)(x - r_2)$

 ทราบสามจุด: แทนใน $y = ax^2 + bx + c$ เพื่อหาระบบสมการของ a, b, c

ต้องมีข้อมูลเพียงพอและสอดคล้องกัน ไม่ใช่สามจุดใด ๆ จะกำหนดฟังก์ชันกำลังสองได้เสมอ

จุดร่วมกับเส้นตรง

 เส้นตรง $y = mx + n$ พบพาราโบลาเมื่อ

$$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$$

 พิจารณา $\Delta' = (b - m)^2 - 4a(c - n)$
 $\Delta' > 0$ มีจุดร่วมสองจุด

 $\Delta' = 0$ เส้นตรงสัมผัสพาราโบลา

 $\Delta' < 0$ ไม่มีจุดร่วม

 หาค่า x แล้วแทนกลับเพื่อหาค่า y ของแต่ละจุด

เส้นระดับและความกว้าง

 สำหรับ $y = a(x - h)^2 + k$ กับเส้น $y = t$

$$(x - h)^2 = \frac{t - k}{a}$$

 ถ้า $(t - k)/a > 0$ จุดร่วมคือ

$$x = h \pm \sqrt{\frac{t - k}{a}}$$

ความกว้างในแนวนอน

$$w = 2\sqrt{\frac{t - k}{a}}$$

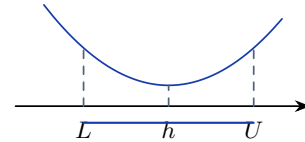
ถ้าค่าอัตราส่วนเป็นศูนย์ มีจุดร่วมที่จุดยอด ถ้าติดลบไม่มีจุดร่วมจริง

ใช้ความกว้างตามระดับที่กำหนด ไม่ใช่ระยะตามส่วนโค้งของกราฟ

ค่าสูงสุดและต่ำสุดบนช่วง

 หากกำหนด $L \leq x \leq U$ ให้คำนวณ $f(L), f(U)$ และ $f(h)$ เฉพาะเมื่อ h อยู่ในช่วง

เลือกค่ามากที่สุดและน้อยที่สุดจากค่าที่ตรวจ ไม่ใช่ค่าจุดยอดที่อยู่นอกโดเมน


ปัญหาพื้นที่และผลคูณ

 ถ้า $x + y = S$ แล้ว

$$xy = x(S - x) = -\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 + \frac{S^2}{4}$$

 สำหรับ $x, y \geq 0$ ผลคูณสูงสุด $S^2/4$ เมื่อ $x = y = S/2$

 พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า: Area = wh โดยต้องเขียน w, h จาก

ตัวแปรเดียวกันและกำหนดช่วงที่ความยาวไม่ติดลบ

กรณีรั้วหรือส่วนประกอบหลายด้าน ต้องนับด้านที่ใช้จริง

ก่อนสร้างสมการความยาวรวม

เปลี่ยนตัวแปรและตรวจโดเมน

 หากมี x^4 และ x^2 ให้แทน $t = x^2 \geq 0$ แล้วพิจารณา

 กราฟกำลังสองในตัวแปร t

 หากแทน $t = \sqrt{r^2 - x^2}$ เมื่อ $r > 0$ จะมี $|x| \leq r$ และ

$$0 \leq t \leq r$$

 ค่าสุดขีดในตัวแปรใหม่ต้องอยู่ในช่วงที่ตัวแปรเดิมสร้างได้ แล้วจึงหาค่า x กลับ

ระยะระหว่างจุดและราก

 จุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ มีระยะตรง

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

 หากอยู่บนเส้นระดับเดียวกัน ระยะเท่ากับ $|x_2 - x_1|$

 สำหรับ $ax^2 + bx + c = 0$ ที่มีรากจริง r_1, r_2 และ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$|r_2 - r_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

 จุดกึ่งกลางของจุดตัดแกน x อยู่ที่ $(-b/(2a), 0)$ ซึ่งอยู่บนแกนสมมาตร