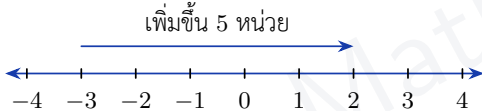


จำนวนเต็ม การดำเนินการ และการหาร
จำนวนเต็มและเส้นจำนวน

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ประกอบด้วยจำนวนเต็มลบ ศูนย์ และจำนวนเต็มบวก

ศูนย์ไม่เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ จำนวนทางขวามีค่ามากกว่าจำนวนทางซ้าย



จำนวนตรงข้ามของ a คือ $-a$ และ $a + (-a) = 0$

สมบัติและเครื่องหมาย

สำหรับจำนวนเต็ม a, b, c

$$a + b = b + a \quad ab = ba$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (ab)c = a(bc)$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad a(b - c) = ab - ac$$

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot 0 = 0$$

การบวกและคูณจำนวนเต็มได้จำนวนเต็ม แต่การหารอาจไม่ได้จำนวนเต็ม และห้ามหารด้วยศูนย์

บวกเครื่องหมายเดียวกัน: บวกค่าสัมบูรณ์ ใช้เครื่องหมายเดิม

บวกต่างเครื่องหมาย: ลบค่าสัมบูรณ์ ใช้เครื่องหมายของจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มากกว่า

$$a - b = a + (-b)$$

คูณหรือหารจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์: เครื่องหมายเหมือนกันได้บวก ต่างกันได้ลบ

ค่าสัมบูรณ์และลำดับการดำเนินการ

$|a|$ คือระยะจาก a ถึงศูนย์ จึงไม่เป็นลบ

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \quad d(a, b) = |a - b|$$

$$|-a| = |a| \text{ และ } |ab| = |a||b|$$

วงเล็บ $\rightarrow$ เลขยกกำลัง $\rightarrow$ คูณ/หาร $\rightarrow$ บวก/ลบ โดยลำดับระดับเดียวกันทำจากซ้ายไปขวา

$$\text{เช่น } -3^2 = -9 \text{ แต่ } (-3)^2 = 9$$

การหารมีเศษและการคำนวณเศษ

$$N = dq + r, \quad 0 \leq r < d$$

N, q, r เป็นจำนวนเต็ม d เป็นตัวหารบวก q เป็นผลหาร และ r เป็นเศษ

ถ้า a, b มีเศษ u, v เมื่อหารด้วย d ให้หาเศษของ $a + b, ab$ จาก $u + v, uv$ แล้วหารด้วย d อีกครั้ง

สัญลักษณ์ $a \equiv u \pmod{d}$ หมายถึง $a - u$ หารด้วย d ลงตัว

จำนวนเฉพาะและเกณฑ์หารลงตัว

จำนวนเฉพาะมีตัวประกอบบวกสองจำนวน คือ 1 และตัวเอง โดย 1 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะหรือจำนวนประกอบ

ตัวหาร เกณฑ์ที่ใช้

2 หลักหน่วยเป็น 0, 2, 4, 6, 8

3, 9 ผลบวกเลขโดดหารด้วย 3, 9 ลงตัวตามลำดับ

4 จำนวนจากสองหลักท้ายหารด้วย 4 ลงตัว

5, 10 ลงท้าย 0 หรือ 5; ลงท้าย 0 ตามลำดับ

8 จำนวนจากสามหลักท้ายหารด้วย 8 ลงตัว

11 ผลต่างของผลบวกเลขโดด สลับ ตำแหน่ง หารด้วย 11 ลงตัว

ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

แยกตัวประกอบเฉพาะแล้วใช้ฐานชุดเดียวกัน โดยใส่กำลัง 0 ให้ฐานที่ขาด

ห.ร.ม. เลือกกำลังต่ำสุด ค.ร.น. เลือกกำลังสูงสุด

$$\gcd(a, b) \operatorname{lcm}(a, b) = ab \quad (a, b > 0)$$

ถ้า $a = bq + r$ จะมี $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ หารต่อจนเศษเป็นศูนย์ ตัวหารสุดท้ายคือ ห.ร.ม.

แบ่งเป็นกลุ่มเท่ากันมากที่สุดมักใช้ ห.ร.ม. การเกิดพร้อมกันของรอบซ้ำมักใช้ ค.ร.น.

เลขหลักหน่วยและปัญหาเศษร่วม

หลักหน่วยของ 7^n : 7, 9, 3, 1 วนรอบทุก 4 กำลัง เศษ $n \div 4$ เป็น 0 ให้ใช้ตัวสุดท้าย

ถ้า N หารด้วย $d_1, d_2, \dots$ เหลือเศษ r เท่ากัน และ

$$L = \operatorname{lcm}(d_1, d_2, \dots)$$

$$N = Lk + r \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ต้องมี $0 \leq r < d_i$ สำหรับตัวหารทุกตัว

ตัวประกอบ ลำดับ และการประยุกต์

การนับตัวประกอบบวก

ถ้า $N = p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t}$ โดย p_i เป็นจำนวนเฉพาะต่างกัน และ e_i เป็นจำนวนเต็มบวก

$$d(N) = (e_1 + 1) \cdots (e_t + 1)$$

$d(N)$ คือจำนวนตัวประกอบบวก เช่น $72 = 2^3 3^2$ มี $(3+1)(2+1) = 12$ ตัว

N เป็นกำลังสองสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อเลขชี้กำลังทุกตัวเป็นคู่

ลำดับและผลบวกเลขคณิต

a_1 คือพจน์แรก d คือผลต่างร่วม n คือจำนวนพจน์ และ S_n คือผลบวก n พจน์แรก

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

ถ้า $d \neq 0$ จำนวนพจน์คือ $n = (a_n - a_1)/d + 1$

จำนวนเต็มเรียงกัน m จำนวน เริ่มที่ a มีผลบวก

$$S = \frac{m(2a + m - 1)}{2}$$

ผลบวกมาตรฐาน

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $\sum$ หมายถึงผลบวกตามดัชนีที่กำหนด

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

ผลบวกช่วง m ถึง n หาได้จากผลบวก 1 ถึง n ลบผลบวก 1 ถึง $m-1$

นับพหุคูณในช่วงจำนวนเต็ม

สำหรับจำนวนเต็ม $L \leq U$ และตัวหารบวก d จำนวนพหุคูณของ d ในช่วง L ถึง U คือ

$$\left\lfloor \frac{U}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{L-1}{d} \right\rfloor$$

เมื่อนับจำนวนที่หารด้วยตัวหารอย่างน้อยหนึ่งตัวลงตัว ให้ลบพหุคูณของ ค.ร.น. ที่นับซ้ำ

ลำดับและผลบวกเรขาคณิต

a_1 คือพจน์แรก r คืออัตราส่วนร่วม

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (r \neq 0)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

เมื่อ $r = 1$ มี $S_n = na_1$ เมื่อ $r = 0$ ทุกพจน์หลังพจน์แรกเป็นศูนย์

ถ้า $|r| < 1$ ผลบวกต่อเนื่องเป็น

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}$$

แฟกทอเรียลและเลขศูนย์ท้าย

สำหรับจำนวนเต็มบวก n

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

$[x]$ คือจำนวนเต็มที่ยกที่สุดซึ่งไม่เกิน x เช่น $[-1.2] = -2$

จำนวนตัวประกอบเฉพาะ p ใน $n!$ คือ

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots$$

หยุดเมื่อกำลังของ p มากกว่า n

จำนวนศูนย์ท้ายของ N เท่ากับ $\min(v_2(N), v_5(N))$

สำหรับ $n!$ นับเพียง $v_5(n!)$

การจัดรูปและการนับตำแหน่ง

ผลบวกที่ตัดทอนกัน เช่น

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

คู่ตัวประกอบของผลต่างกำลังสอง

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

ถ้า $u = a-b$, $v = a+b$ แล้ว $a = (u+v)/2$,

$b = (v-u)/2$ โดย u, v ต้องมีคู่ที่เหมือนกันเพื่อให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม

เมื่อเรียงเลขโดด: กลุ่มจำนวนบวก s หลักใช้เลขโดด

$9 \cdot 10^{s-1} s$ ตัว นับกลุ่มก่อนเลือกจำนวนและตำแหน่งหลัก