

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย

ส่วนสมนัย เกล็ดพิสูจน์ และเส้นขนาน

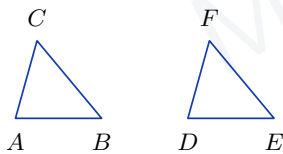
ความเท่ากันทุกประการ

รูปเท่ากันทุกประการมีรูปร่างและขนาดเท่ากัน ด้านและมุมสมนัยเท่ากัน

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ระบุคู่ $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$

$$AB = DE, BC = EF, CA = FD$$

ต้องเขียนลำดับจุดให้ตรงคู่สมนัยก่อนนำด้านหรือมุมไปใช้



เกณฑ์สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ

ด.ด.ด.: ด้านสมนัยสามคู่เท่ากัน

ด.ม.ด.: ด้านสองคู่และมุมระหว่างด้านเท่ากัน

ม.ด.ม.: มุมสองคู่และด้านคั่นมุมเท่ากัน

ม.ม.ด.: มุมสองคู่และด้านสมนัยหนึ่งคู่เท่ากัน

จ.ด.ด.: เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีด้านฉากและด้านประกอบมุมฉากหนึ่งคู่เท่ากัน

มุมเท่ากันสามคู่ให้เพียงความคล้าย ยังสรุปขนาดเท่ากันไม่ได้

ความคล้ายและอัตราส่วนสมนัย

รูปคล้ายมีมุมสมนัยเท่ากัน และอัตราส่วนความยาวสมนัยคงตัว $k > 0$

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = k$$

k เป็นอัตราส่วนรูปใหม่ต่อรูปเดิม

$k > 1$ ขยาย, $0 < k < 1$ ย่อ, $k = 1$ เท่ากันทุกประการ

สี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปพิเศษ

สี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านตรงข้ามขนานและยาวเท่ากัน

มุมตรงข้ามเท่ากัน เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งกัน

ผืนผ้ามีเส้นทแยงมุมนยาวเท่ากัน ขนมหยาบทุกคู่

มีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน จัดวิธีสมบัติทั้งสองแบบ

เกณฑ์สามเหลี่ยมคล้าย

ม.ม.: มุมสมนัยสองคู่เท่ากัน

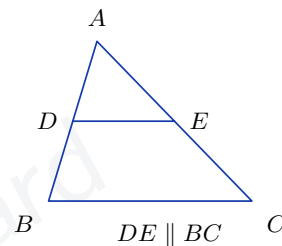
ด.ด.ด.: อัตราส่วนด้านสมนัยสามคู่เท่ากัน

ด.ม.ด.: อัตราส่วนด้านสองคู่เท่ากัน และมุมระหว่างด้านเท่ากัน

ให้เขียนคู่มุมเท่ากันก่อนเรียงชื่อสามเหลี่ยม แล้วเขียนอัตราส่วนโดยรักษาทิศรูปใหม่ต่อรูปเดิม

เส้นขนานแบ่งด้านสามเหลี่ยม

เมื่อ D อยู่บน AB , E อยู่บน AC และ $DE \parallel BC$



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

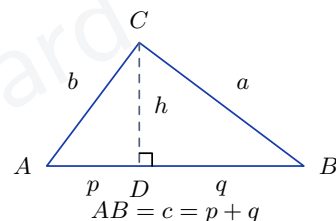
อัตราส่วนส่วนต่อส่วนไม่เหมือนส่วนต่อทั้งด้าน

ถ้า D, E เป็นจุดกึ่งกลาง จะมี $DE = BC/2$

รูปซ้อนและเส้นสูงในมุมฉาก

เมื่อ $\angle C = 90^\circ$ และ $CD \perp AB$ ให้

$AB = c, AD = p, DB = q, CD = h$



$$h^2 = pq, \quad AC^2 = cp, \quad BC^2 = cq$$

ได้จากการจับคู่สามเหลี่ยมคล้ายทั้งสามรูป ต้องระวังว่าด้านฉากของแต่ละรูปเป็นคนละเส้น

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย

อัตราส่วนพื้นที่ พื้นที่ผิว และปริมาตร

ความยาวรอบรูปและพื้นที่

รูปคล้ายที่มีอัตราส่วนความยาว k

$$\frac{P_2}{P_1} = k, \quad \frac{\text{Area}_2}{\text{Area}_1} = k^2$$

P คือความยาวรอบรูป และ Area คือพื้นที่

ถ้าพื้นที่เป็นอัตราส่วน $m : n$ ความยาวเป็น $\sqrt{m} : \sqrt{n}$

เช่น ด้านเป็น 2 : 3 พื้นที่เป็น 4 : 9 ไม่ใช่ 2 : 3

ส่วนที่เหลือหลังตัดรูปคล้ายขนาด k เท่า ($0 < k < 1$) มีพื้นที่ $(1 - k^2)\text{Area}_{\text{ใหญ่}}$

พื้นที่จากฐานและความสูง

สามเหลี่ยมสูงเท่ากัน: อัตราส่วนพื้นที่เท่ากับอัตราส่วนฐาน

สามเหลี่ยมฐานเท่ากัน: อัตราส่วนพื้นที่เท่ากับอัตราส่วนสูง

ถ้า D บน AB และ E บน AC

$$\frac{|\triangle ADE|}{|\triangle ABC|} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}$$

ใช้ได้แม้ DE ไม่ขนาน BC โดยสองรูปมีมุม A ร่วมกัน

$|\triangle XYZ|$ หมายถึงพื้นที่สามเหลี่ยม XYZ

เส้นแบ่งครึ่งมุมและคางหมู

ถ้า AD แบ่งครึ่งมุม A และ D อยู่บน BC

$$BD : DC = AB : AC$$

ถ้า $ABCD$ เป็นคางหมู $AB \parallel CD$ เส้นทแยงมุม AC, BD ตัดกันที่ O

$$\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{CD}$$

$$\frac{|\triangle AOB|}{|\triangle COD|} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2$$

อัตราส่วนทั้งหมดต้องตรงกับลำดับชื่อฐานคู่ขนาน

มัธยฐานและจุดศูนย์ถ่วง

ถ้า M เป็นจุดกึ่งกลาง BC และ G เป็นจุดร่วมมัธยฐานของสามเหลี่ยม ABC

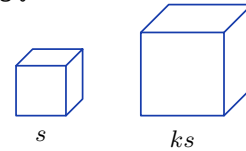
$$AG : GM = 2 : 1$$

มัธยฐานหนึ่งเส้นแบ่งพื้นที่เป็นสองส่วนเท่ากัน สามเส้นแบ่งเป็นหกส่วนเท่ากัน

เมื่อรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน เส้นมัธยฐาน เส้นสูง และเส้นแบ่งครึ่งมุมสมนัยมีอัตราส่วนความยาวเท่ากับอัตราส่วนด้าน

รูปสามมิติที่คล้ายกัน

รูปทรงคล้ายต้องมีมิติความยาวสมนัยทุกคู่เป็น k เท่า ไม่ใช่เปลี่ยนเพียงมิติเดียว



$$\frac{S_2}{S_1} = k^2, \quad \frac{V_2}{V_1} = k^3$$

S คือพื้นที่ผิว V คือปริมาตร

ถ้าปริมาตรเป็น $m : n$ ความยาวเป็น $\sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}$

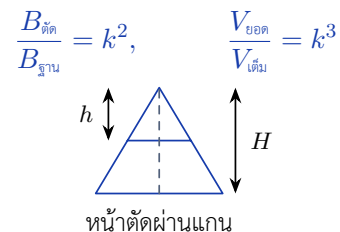
และพื้นที่ผิวเป็น $(\sqrt[3]{m})^2 : (\sqrt[3]{n})^2$

การตัดยอดขนานฐาน

กรวยหรือพีระมิดถูกตัดด้วยระนาบขนานฐาน ส่วนยอด

คล้ายรูปเดิม ให้ $k = h/H$ โดย h วัดจากยอดถึงหน้าตัด

และ H คือความสูงเดิม



ส่วนล่างที่เหลือมีปริมาตร $(1 - k^3)V_{\text{เดิม}}$

ภาชนะยอดล่างมีน้ำสูง h จึงมีสัดส่วนปริมาตรน้ำ $(h/H)^3$

ห้ามใช้อัตราส่วนพื้นที่หรือปริมาตรแทน

อัตราส่วนความสูงโดยตรง

การวัดความสูงและความยาวรอบรูป

การใช้เงาต้องมีมุมแสงเดียวกัน พื้นและวัตถุตั้งฉากกัน จึงได้

$$\frac{\text{ความสูงวัตถุ}}{\text{ความยาวเงาวัตถุ}} = \frac{\text{ความสูงอ้างอิง}}{\text{ความยาวเงาอ้างอิง}}$$

เมื่อนำความคล้ายไปหาความยาวรอบรูป ให้รวมเฉพาะขอบ

ภายนอกหลังหาด้านที่ไม่ทราบแล้ว ไม่นับเส้นภายในซ้ำ