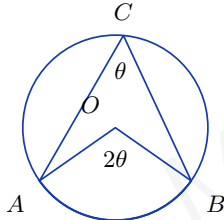


มุม คอร์ด และเส้นสัมผัส
มุมศูนย์กลางและมุมบนเส้นรอบวง

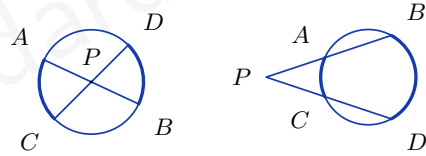
ให้ O เป็นศูนย์กลาง A, B, C อยู่บนวงกลม และ C ไม่อยู่บนส่วนโค้ง AB ที่พิจารณา



มุมศูนย์กลางมีขนาดสองเท่าของมุมบนเส้นรอบวง เมื่อรองรับส่วนโค้งเดียวกัน

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

ต้องเลือกส่วนโค้งให้ตรงกัน มุมศูนย์กลางอาจเป็นมุมกลับ ส่วนมุมบนเส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้งเดียวกันเท่ากัน

มุมจากเส้นตัดภายในและภายนอก


ซ้าย: คอร์ด AB, CD ตัดกันภายในที่ P

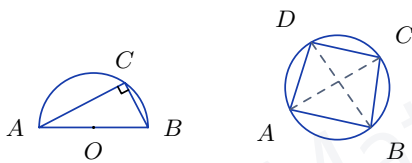
$$\angle APC = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BD})$$

$m\widehat{AC}$ คือขนาดมุมของส่วนโค้ง AC

ขวา: เส้นตัดจาก P ภายนอก ผ่าน A, B และ C, D โดย A, C ใกล้ P กว่า

$$\angle APC = \frac{1}{2}(m\widehat{BD} - m\widehat{AC})$$

มุมภายในใช้ผลบวกส่วนโค้ง มุมภายนอกใช้ส่วนโค้งไกลลบส่วนโค้งใกล้

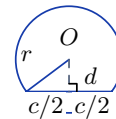
มุมในครึ่งวงกลมและสี่เหลี่ยม


ซ้าย: AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จึงมี $C = 90^\circ$ และบทกลับเป็นจริง

ขวา: สี่เหลี่ยมมุม $ABCD$ แนบในวงกลม

$$A + C = 180^\circ, \quad B + D = 180^\circ$$

มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในตรงข้าม บทกลับใช้ตรวจว่าสี่เหลี่ยมมีวงกลมผ่านจุดยอดทั้งสี่ได้

คอร์ดและระยะจากศูนย์กลาง


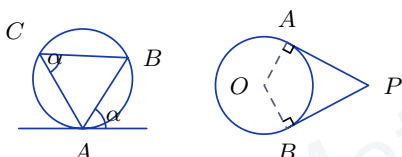
เส้นจากศูนย์กลางตั้งฉากกับคอร์ดแบ่งคอร์ดครึ่งหนึ่ง และบทกลับเป็นจริง

รัศมี r คอร์ดห่างศูนย์กลาง d มีความยาว c

$$c = 2\sqrt{r^2 - d^2} \quad (0 \leq d < r)$$

ในวงกลมรัศมีเท่ากัน คอร์ดเท่ากันก็ต่อเมื่อห่างศูนย์กลางเท่ากัน

คอร์ดขนานกันตัดส่วนโค้งระหว่างปลายคอร์ดด้านเดียวกันให้เท่ากัน

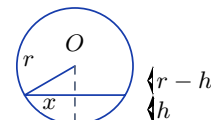
มุมเส้นสัมผัสกับคอร์ดและเส้นสัมผัสคู่


ซ้าย: มุมระหว่างเส้นสัมผัสที่ A กับคอร์ด AB เท่ากับ $\angle ACB$ ในส่วนตรงข้าม

ขวา: รัศมีตั้งฉากกับเส้นสัมผัส และ $PA = PB$

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AOB$$

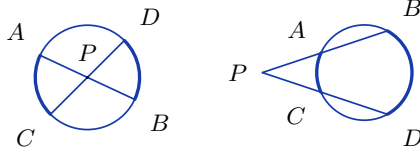
ใช้ $\angle AOB$ ด้านส่วนโค้งเล็ก

ส่วนสูงของส่วนโค้งเล็ก


x คือครึ่งคอร์ด h คือระยะจากคอร์ดถึงส่วนโค้งตามแนวผ่านศูนย์กลาง r คือรัศมี

$$x^2 = r^2 - (r - h)^2 = 2rh - h^2$$

ดังนั้น $r = (x^2 + h^2)/(2h)$ เมื่อ $h > 0$

ผลคูณของส่วนเส้นตรง รัศมี และพื้นที่
ผลคูณส่วนของคอร์ดและเส้นตัด


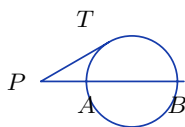
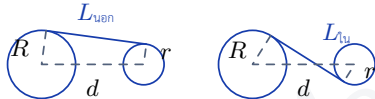
ซ้าย: คอร์ด AB, CD ตัดกันภายในที่ P

ขวา: เส้นตัดจาก P ภายนอก ผ่าน A, B และ C, D

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

ภายนอก: วัดจาก P ถึงจุดใกล้และจุดไกลตามลำดับ
เมื่อ PT เป็นเส้นสัมผัส มี

$$PT^2 = PA \cdot PB$$


เส้นสัมผัสร่วมของสองวงกลม


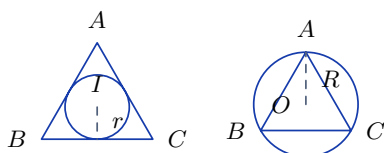
วงกลมรัศมี R, r ศูนย์กลางห่าง d ช่วงเส้นสัมผัสยาว

$$L_{นอก} = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}$$

$$L_{ใน} = \sqrt{d^2 - (R + r)^2}$$

ช่วงยาวเป็นบวกเมื่อ $d > |R - r|$ และ $d > R + r$ ตามลำดับ

สี่เหลี่ยมล้อมวงกลมมีผลบวกด้านตรงข้ามเท่ากัน

วงกลมแนบในและล้อมรอบสามเหลี่ยม


a, b, c คือด้านตรงข้าม A, B, C ให้ $s = (a + b + c)/2$ และ

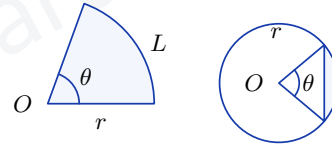
$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$r = \frac{\text{Area}}{s}, \quad R = \frac{abc}{4\text{Area}}$$

r คือรัศมีแนบใน R คือรัศมีล้อมรอบ

ถ้า $C = 90^\circ$: $R = c/2$, $r = (a + b - c)/2$

ศูนย์กลางแนบใน I มี $\angle BIC = 90^\circ + A/2$

ส่วนโค้ง พื้นที่ และขอบรูป


รัศมี r มุมศูนย์กลาง θ องศา

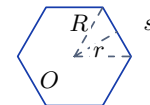
$$L = \frac{\theta}{360^\circ} 2\pi r, \quad A = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$$

L คือความยาวส่วนโค้ง A คือพื้นที่ส่วนวงกลม ขอบทั้งหมดมีความยาว $L + 2r$

ขวา: พื้นที่แฉะระหว่างคอร์ดกับส่วนโค้งเล็ก

$$A_{เล็ก} = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

ใช้ $0 < \theta \leq 180^\circ$ ถ้าใช้เรเดียนให้แทนพจน์แรกด้วย $r^2\theta/2$

รูปหลายเหลี่ยมในวงกลม


รูป n ด้านเท่ามุมเท่า รัศมีล้อมรอบ R รัศมีแนบใน r ด้านยาว s

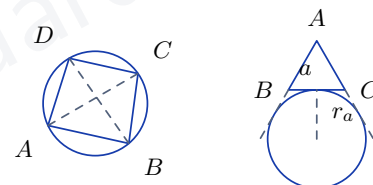
$$s = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} n s r$$

เส้นทแยงมุมมี $n(n-3)/2$ เส้น

สามเหลี่ยมด้านเท่าด้าน s : $R = s/\sqrt{3}$, $r = s/(2\sqrt{3})$

จัตุรัสด้าน s : $R = s/\sqrt{2}$, $r = s/2$

บิตเลมีและวงกลมแนบนอก


ซ้าย: สี่เหลี่ยมมุม $ABCD$ แนบในวงกลม

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

ขวา: สามเหลี่ยมมีพื้นที่ Area ครึ่งรอบรูป s ด้าน a ตรงข้ามมุม A รัศมีแนบนอกด้านนั้นคือ

$$r_a = \frac{\text{Area}}{s - a}$$