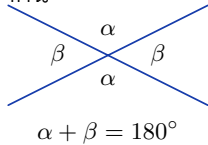


มุม เส้นขนาน และรูปหลายเหลี่ยม
มุมพื้นฐาน

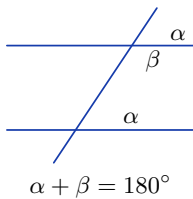
มุมบนเส้นตรงรวม 180° มุมรอบจุดรวม 360° มุมตรงข้ามเมื่อเส้นตรงตัดกันเท่ากัน



ชื่อมุมสามตัวอักษร เช่น $\angle ABC$ มี B เป็นจุดยอด
สามเหลี่ยม: $A + B + C = 180^\circ$ มุมภายนอกหนึ่งมุมเท่ากับผลบวกสองมุมภายในที่ไม่ประชิด

เส้นขนานกับเส้นตัด

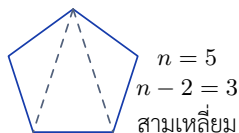
เมื่อเส้นตรงสองเส้นขนานกัน
มุมสมนัยเท่ากัน มุมแย้งเท่ากัน และมุมภายในด้านเดียวกันรวม 180°



บทกลับใช้ตรวจสอบความขนานได้ เมื่อพบคู่มุมตามเงื่อนไขข้างต้น

รูปหลายเหลี่ยม

รูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย n ด้าน ซึ่งขอบไม่ตัดตัวเอง ทั้งรูปนูนและรูปเว้า



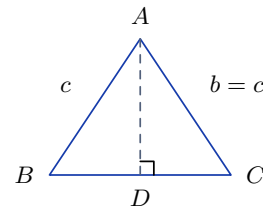
$$\text{ผลรวมมุมภายใน} = 180^\circ(n - 2)$$

รูปนูน: เลือกมุมภายนอกโดยต่อด้านในทิศทางเดียวกัน มีผลรวม 360°

ด้านเท่ามุมเท่า: มุมภายในแต่ละมุม $180^\circ(n - 2)/n$ และมุมภายนอก $360^\circ/n$

สามเหลี่ยมหน้าจั่วและด้านเท่า

ด้านสองด้านเท่ากันก็ต่อเมื่อมุมตรงข้ามด้านคู่นั้นเท่ากัน
ในหน้าจั่ว เส้นจากยอดถึงจุดกึ่งกลางฐานเป็นทั้งเส้นสูง
เส้นมัธยฐาน และเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด



สามเหลี่ยมด้านเท่ามีมุมทุกมุม 60°

เงื่อนไขด้านและความสัมพันธ์กับมุม

สำหรับความยาว $a, b, c > 0$ สร้างสามเหลี่ยมได้เมื่อ

$$|a - b| < c < a + b$$

ด้านยาวกว่าจะอยู่ตรงข้ามมุมที่ใหญ่กว่า
ความเท่ากันต้องพิจารณาทั้งด้านและมุมสมนัย ไม่นอมนานจากลักษณะภาพเพียงอย่างเดียว

ดาวห้าแฉกและมูนนาฬิกา

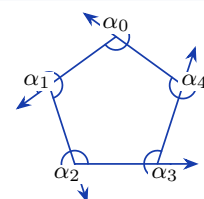
ผลรวมมุมแหลมที่ปลายดาวห้าแฉกแบบเส้นตรงตัดกันตามรูปดาวมาตรฐานเท่ากับ 180° ไม่ใช่สูตรผลรวมมุมภายในของรูปอย่างง่ายกับเส้นดาวที่ตัดตัวเอง

นาฬิกาเวลา h นาฬิกา m นาที วัดมุมเข็มจากเลข 12

$$\theta_{\text{ชั่วโมง}} = 30h + 0.5m, \quad \theta_{\text{นาที}} = 6m$$

ให้ $d = |30h - 5.5m|$ โดยใช้ $0 \leq h < 12$ และ

$0 \leq m < 60$ มุมเล็กระหว่างเข็มคือ $\min(d, 360^\circ - d)$

มุมภายนอกของรูปหลายเหลี่ยมนูน


ต่อด้านในทิศทางเดียวกันและเลือกมุมภายนอกหนึ่งมุมต่อจุดยอด ผลรวมเท่ากับการหมุนครบหนึ่งรอบ

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} = 360^\circ$$

ภาพแสดงตัวอย่างรูปห้าเหลี่ยม

เส้นสำคัญ อัตราส่วน และทฤษฎีบทในสามเหลี่ยม
เส้นสำคัญและจุดร่วม

เส้นมัธยฐาน: จุดยอดถึงจุดกึ่งกลางด้านตรงข้าม

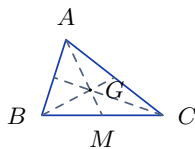
เส้นสูง: จุดยอดตั้งฉากกับด้านตรงข้ามหรือส่วนต่อ

เส้นแบ่งครึ่งมุม: แบ่งมุมเป็นสองมุมเท่ากัน

เส้นตั้งฉากแบ่งครึ่งด้าน: ผ่านจุดกึ่งกลางด้านและตั้งฉากกับด้านนั้น

เซนทรอยด์และเส้นกึ่งกลาง

จุดร่วมเส้นมัธยฐานคือเซนทรอยด์ G ถ้า M เป็นจุดกึ่งกลาง BC

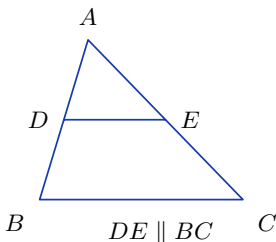


$$AG : GM = 2 : 1$$

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

มัธยฐานหนึ่งเส้นแบ่งพื้นที่เป็นสองส่วนเท่ากัน สามเส้นแบ่งเป็นหกส่วนเท่ากัน

เส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางสองด้านขนานกับด้านที่สาม และยาวครึ่งหนึ่งของด้านนั้น



เมื่อ D, E เป็นจุดกึ่งกลาง จะมี $DE = BC/2$

วงกลมแนบในและล้อมรอบ

ให้ $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ และ $s = (a + b + c)/2$ เป็นครึ่งความยาวรอบรูป

$$\text{Area} = rs, \quad R = \frac{abc}{4\text{Area}}$$

r คือรัศมีวงกลมแนบใน ศูนย์กลางเป็นจุดตัดเส้นแบ่งครึ่งมุม
 R คือรัศมีวงกลมล้อมรอบ ศูนย์กลางเป็นจุดตัดเส้นตั้งฉากแบ่งครึ่งด้าน

เมื่อ $C = 90^\circ$ ด้าน c เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จึงมี $R = c/2$ และมัธยฐานจาก C ยาว $c/2$

เส้นแบ่งครึ่งมุมและพื้นที่

ถ้า AD แบ่งครึ่งมุม A และ D อยู่บน BC

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

สามเหลี่ยมที่มีความสูงเท่ากันมีอัตราส่วนพื้นที่เท่ากับอัตราส่วนฐาน

ถ้า D บน AB และ E บน AC

$$\frac{|\triangle ADE|}{|\triangle ABC|} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}$$

สัญลักษณ์ $|\triangle XYZ|$ หมายถึงพื้นที่สามเหลี่ยม XYZ

เซวาและเมนลอส

เซวา: ให้ D, E, F อยู่บน BC, CA, AB ตามลำดับ เส้น AD, BE, CF พบกันจุดเดียวกันก็ต่อเมื่อ

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

เมนลอส: เส้นตรงตัดเส้น BC, CA, AB หรือส่วนต่อที่ D, E, F ตามลำดับ จะมี

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

สูตรนี้ใช้ความยาวเป็นบวก โดยต้องมีจุดแบ่งบนส่วนต่อจำนวนคี่ และจุดตัดไม่เป็นจุดยอด

สองทฤษฎีใช้เงื่อนไขต่างกัน ต้องตรวจว่าเป็นเส้นผ่านจุดร่วมหรือเป็นจุดสามจุดอยู่แนวเส้นตรง

มัธยฐานและสี่เหลี่ยมคางหมู

สามเหลี่ยมด้าน a, b, c มัธยฐานจากมุม A ถึงด้าน a ยาว

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

สี่เหลี่ยมคางหมูฐานคู่ขนานยาว a, b สูง h เส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านที่ไม่ขนานยาว

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Area} = mh$$

เส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมยาว $|a-b|/2$ และขนานกับฐาน