



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง เวกเตอร์

www.mathstandard.com

เรื่อง เวกเตอร์

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง เวกเตอร์ ครอบคลุมการดำเนินการ พิกัด ผลคูณเชิงสเกลาร์ การฉาย
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ พื้นที่ ปริมาตร และการประยุกต์ทางเรขาคณิต

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ ระบบพิกัด ทฤษฎีบทพีทาโกรัส การจัดรูปพีชคณิต ระบบสมการ และตรีโกณมิติ
แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ
ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $\overline{AB}$ มีจุดเริ่มต้น A และจุดปลาย B ส่วน $|\overline{AB}|$ หมายถึงขนาดซึ่งเป็นจำนวนไม่เป็นลบ
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ แทนเวกเตอร์ และ $\vec{0}$ แทนเวกเตอร์ศูนย์ จำนวนจริงที่คูณเวกเตอร์เรียกว่าสเกลาร์
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน x, y, z ด้านบวกของระบบพิกัดฉากตามลำดับ
- พิกัดของจุดเขียนเป็น (x, y) หรือ (x, y, z) ส่วนเวกเตอร์แสดงด้วยเวกเตอร์ฐาน เช่น $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ เพื่อ
แยกความหมาย
- มุมระหว่างเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์เลือกในช่วง $[0, \pi]$ เมื่อย้ายจุดเริ่มต้นมาอยู่ร่วมกัน ถ้าไม่กำกับองศาให้
ใช้เรเดียน
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ เป็นผลคูณเชิงสเกลาร์ซึ่งให้จำนวน ส่วน $\vec{u} \times \vec{v}$ เป็นผลคูณเชิงเวกเตอร์ในสามมิติซึ่งให้เวกเตอร์
- การฉายแยกองค์ประกอบเชิงสเกลาร์ที่อาจติดลบ เวกเตอร์ฉาย และขนาดของเวกเตอร์ฉายซึ่งไม่เป็นลบ
- ใช้ Area แทนพื้นที่ และ V แทนปริมาตร โดยระบุรูปอ้างอิงและหน่วยในแต่ละข้อ ภาพสามมิติเป็น
ภาพฉายบนระนาบกระดาษ

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง เวกเตอร์

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 พืชคณิตเวกเตอร์และพิกัด	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–20	12
ตอนที่ 2 ผลคูณเชิงสเกลาร์และมุม	
เนื้อหาและตัวอย่าง	22
แบบฝึกหัดข้อ 21–40	29
ตอนที่ 3 เวกเตอร์สามมิติ การฉาย และระยะ	
เนื้อหาและตัวอย่าง	39
แบบฝึกหัดข้อ 41–60	46

เรื่อง เวกเตอร์

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 ผลคูณเชิงเวกเตอร์และพื้นที่

เนื้อหาและตัวอย่าง	56
แบบฝึกหัดข้อ 61–80	61

ตอนที่ 5 ผลคูณสามชั้นและปริมาตร

เนื้อหาและตัวอย่าง	71
แบบฝึกหัดข้อ 81–100	77

ตอนที่ 6 การประยุกต์และการให้เหตุผล

เนื้อหาและตัวอย่าง	87
แบบฝึกหัดข้อ 101–120	92
สรุปเนื้อหา เรื่อง เวกเตอร์	102
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	109
เฉลยเฉพาะคำตอบ	122
เฉลยวิธีคิด	129

เรื่อง เวกเตอร์

ตอนที่ 1 พีชคณิตเวกเตอร์และฟิวกัด

เป้าหมาย แยกเวกเตอร์ออกจากสเกลาร์ รักษาทิศทาง และใช้ฟิวกัดหรือฐานเวกเตอร์หาจุดและการกระจัด

1.1 ขนาด ทิศทาง และการคูณด้วยสเกลาร์

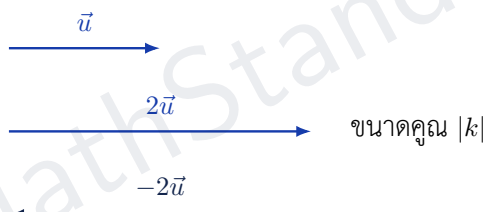
เวกเตอร์มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น การกระจัดและความเร็ว ส่วนระยะทางและอัตราเร็วเป็นสเกลาร์ เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ เริ่มที่ A สิ้นสุดที่ B เวกเตอร์สองเวกเตอร์เท่ากันเมื่อมีขนาดเท่ากันและทิศเดียวกัน แม้มีจุดเริ่มต้นต่างกัน

หลักการและสูตร

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \quad \vec{0} = \overrightarrow{AA}, \quad |\vec{0}| = 0$$

$$|k\vec{u}| = |k| |\vec{u}| \quad (k \in \mathbb{R})$$

$k > 0$ รักษาทิศ $k < 0$ กลับทิศ และ $k = 0$ ให้เวกเตอร์ศูนย์ซึ่งไม่มีทิศทางแน่นอน



ตัวอย่าง 1 ถ้า $|\vec{u}| = 3$ จงหาขนาดและทิศทางของ $-4\vec{u}$

วิธีคิด ใช้ค่าสัมบูรณ์ของสเกลาร์ ได้ $|-4\vec{u}| = |-4|(3) = 12$ เครื่องหมายลบทำให้ชี้ตรงข้ามกับ $\vec{u}$

ตอบ ขนาด 12 หน่วย ทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$

1.2 การบวก ลบ และเวกเตอร์ตำแหน่ง

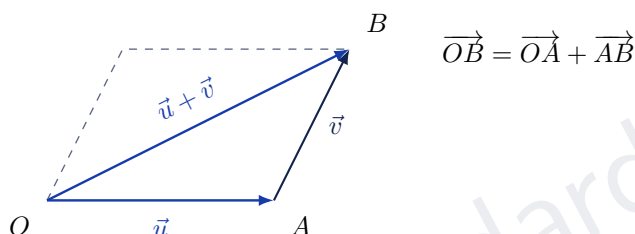
การบวกใช้การต่อหัวกับท้ายหรือสี่เหลี่ยมด้านขนาน การลบคือการบวกเวกเตอร์นิเสธ ให้ O เป็นจุดอ้างอิงร่วม เวกเตอร์จากจุดต้นไปจุดปลายเท่ากับเวกเตอร์ตำแหน่งปลายลบตำแหน่งต้น

หลักการและสูตร

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}), \quad k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

การบวกสลับที่และเปลี่ยนหมู่ได้ ส่วนผลรวมรอบเส้นทางปิดเป็น $\vec{0}$



ตัวอย่าง 2 ให้ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ จงเขียน $\overrightarrow{CA}$ ในรูปของ $\vec{u}, \vec{v}$

วิธีคิด ต่อเส้นทางได้ $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ เมื่อกลับจุดต้นกับจุดปลายจึงเปลี่ยนเครื่องหมาย ได้ $\overrightarrow{CA} = -(\vec{u} + \vec{v})$

ตอบ $-\vec{u} - \vec{v}$

1.3 ส่วนประกอบและขนาดในระนาบ

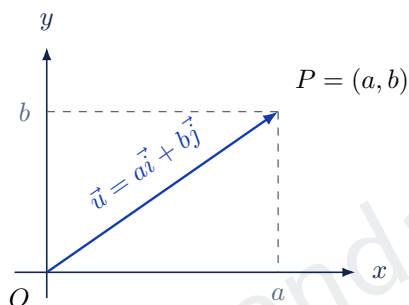
ให้ $\vec{i}, \vec{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน x, y ด้านบวกที่ตั้งฉากกัน เวกเตอร์ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ มีส่วนประกอบตามแกนเป็น a, b ส่วนจุด $P = (a, b)$ มีเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{OP} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เมื่อ O เป็นจุดกำเนิด

หลักการและสูตร

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$

$$|a\vec{i} + b\vec{j}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

รวมส่วนประกอบก่อนหาขนาด โดยทั่วไป $|\vec{u} + \vec{v}| \neq |\vec{u}| + |\vec{v}|$



ตัวอย่าง 3 ให้ $A = (-1, 2)$ และ $B = (5, -6)$ จงหา $\vec{AB}$ และขนาด

วิธีคิด พิกัดปลายลบต้นให้ $\vec{AB} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ ใช้พีทาโกรัสได้ $|\vec{AB}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$

ตอบ $6\vec{i} - 8\vec{j}$ และขนาด 10 หน่วย

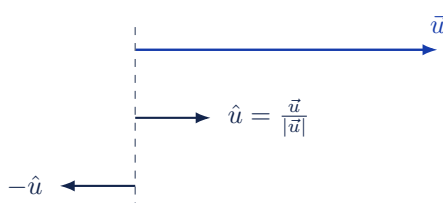
1.4 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยและการกำหนดขนาด

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมีขนาดหนึ่ง การหารเวกเตอร์ไม่เป็นศูนย์ด้วยขนาดของตนเองรักษาทิศและปรับขนาดเป็นหนึ่ง ถ้าต้องการขนาด $L > 0$ ให้คูณเวกเตอร์หนึ่งหน่วยด้วย L

หลักการและสูตร

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \quad (\vec{u} \neq \vec{0}), \quad |\hat{u}| = 1$$

$$\vec{w} = L\hat{u} \text{ ทิศเดียวกัน}, \quad \vec{w} = -L\hat{u} \text{ ทิศตรงข้าม}$$



ตัวอย่าง 4 จงหาเวกเตอร์ขนาด 2 หน่วยที่ชี้ตรงข้ามกับ $\vec{u} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$

วิธีคิด $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 144} = 13$ จึงมี $\hat{u} = \frac{5\vec{i} + 12\vec{j}}{13}$ เวกเตอร์ที่ต้องการคือ $-2\hat{u}$

ตอบ $-\frac{10}{13}\vec{i} - \frac{24}{13}\vec{j}$

1.5 ฐานเวกเตอร์และความเป็นอิสระ

เวกเตอร์ที่ไม่ขนานกันสองเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นฐานของระนาบที่สร้างจากเวกเตอร์คู่นั้น เวกเตอร์ในระนาบเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นได้เพียงแบบเดียว จึงเทียบสัมประสิทธิ์ของฐานเดียวกันได้

หลักการและสูตร

$$a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v} \implies a = c, \quad b = d$$

เงื่อนไขที่จำเป็นคือ $\vec{u}, \vec{v}$ ไม่ขนานกัน ถ้าขนานกัน การเขียนอาจไม่เป็นเอกลักษณ์

ตัวอย่าง 5 ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ ไม่ขนานกัน และ $(x + 2y)\vec{u} + (2x - y)\vec{v} = 8\vec{u} + \vec{v}$ จงหา x, y

วิธีคิด เทียบสัมประสิทธิ์ได้ $x + 2y = 8$ และ $2x - y = 1$ คูณสมการที่สองด้วย 2 แล้วบวกสมการแรกได้ $5x = 10$ จึง $x = 2, y = 3$

ตอบ $x = 2, y = 3$

1.6 จุดแบ่งส่วนและพารามิเตอร์ของเส้นตรง

ให้ A, B เป็นจุดต่างกัน และ O เป็นจุดอ้างอิงร่วม หาก D แบ่งภายในโดย $AD : DB = r : s$ เมื่อ $r, s > 0$ จะใช้สัดส่วนจาก A ไป B เท่ากับ $\frac{r}{r+s}$

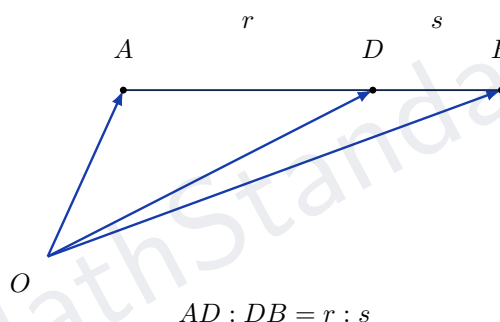
หลักการและสูตร

$$\overrightarrow{OD} = \frac{s\overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{OB}}{r+s}$$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$0 \leq t \leq 1$ อยู่บนส่วนของเส้นตรง AB และ $t = \frac{1}{2}$ เป็นจุดกึ่งกลาง ค่า $t < 0$ หรือ $t > 1$ อยู่บนส่วน

ต่อของเส้นตรง หาก D แบ่งภายนอกโดย $AD : DB = r : s$ และ $r \neq s$ จะได้ $\overrightarrow{OD} = \frac{r\overrightarrow{OB} - s\overrightarrow{OA}}{r-s}$ โดย $r, s > 0$



$$AD : DB = r : s$$

ตัวอย่าง 6 ให้ $A = (1, 2), B = (7, 5)$ และ $AD : DB = 2 : 1$ จงหาพิกัด D

วิธีคิด ใช้ $r = 2, s = 1$ จึง

$$\overrightarrow{OD} = \frac{(\vec{i} + 2\vec{j}) + 2(7\vec{i} + 5\vec{j})}{3} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$$

ตอบ $D = (5, 4)$

1.7 เส้นมัธยฐานและจุดศูนย์กลางมวล

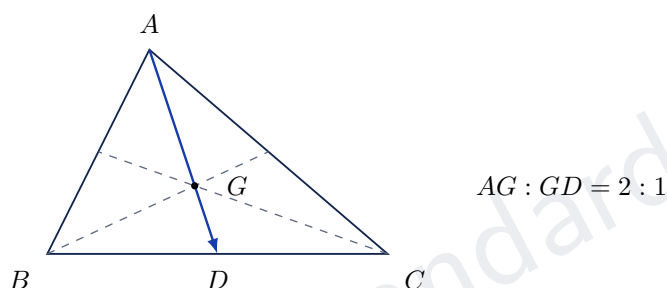
ในสามเหลี่ยม ABC ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางของ BC เส้นมัธยฐานทั้งสามตัดกันที่ G ซึ่งแบ่งแต่ละเส้นในอัตราส่วน $2 : 1$ จากจุดยอด

หลักการและสูตร

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AD}, \quad \vec{DG} = -\frac{1}{3}\vec{AD}$$

O เป็นจุดอ้างอิงเดียวกันของทุกเวกเตอร์ตำแหน่ง



ตัวอย่าง 7 ให้ $A = (0, 0), B = (9, 0), C = (0, 6)$ ถ้า D เป็นจุดกึ่งกลางของ BC และ G เป็นจุดศูนย์กลางมวล จงหา $\vec{DG}$

วิธีคิด ได้ $D = (\frac{9}{2}, 3)$ และ $G = (3, 2)$ ดังนั้นตำแหน่งปลายลบต้นให้ $\vec{DG} = (3 - \frac{9}{2})\vec{i} + (2 - 3)\vec{j}$

ตอบ $-\frac{3}{2}\vec{i} - \vec{j}$

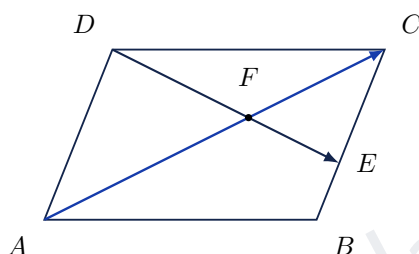
1.8 จุดตัดจากเส้นทางเวกเตอร์

จุดตัดของสองเส้นตรงมีเวกเตอร์ตำแหน่งเดียวกัน เขียนตำแหน่งจากแต่ละเส้นด้วยพารามิเตอร์แยกกัน แล้วเทียบส่วนประกอบหรือสัมประสิทธิ์ของฐานที่ไม่ขนานกัน

หลักการและสูตร

$$\overrightarrow{OA} + t\vec{u} = \overrightarrow{OB} + s\vec{v}$$

$\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ทิศทางที่ไม่เป็นศูนย์ของแต่ละเส้น และ t, s เป็นจำนวนจริง หากจำกัดเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงต้องตรวจช่วงพารามิเตอร์ด้วย



ตัวอย่าง 8 ให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุด E อยู่บน BC โดย $BE = \frac{BC}{3}$ และ $F = AC \cap DE$ จงหา $AF : FC$

วิธีคิด กำหนด $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AD} = \vec{v}$ และใช้อ้างอิงที่ A จะได้ตำแหน่ง E เป็น $\vec{u} + \frac{\vec{v}}{3}$ ส่วน F เขียนได้สองทาง

$$t(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{v} + s(\vec{u} - \frac{2\vec{v}}{3})$$

เทียบสัมประสิทธิ์ได้ $t = s$ และ $t = 1 - \frac{2s}{3}$ จึง $t = \frac{3}{5}$ ดังนั้น $AF : FC = t : (1 - t) = 3 : 2$

ตอบ 3 : 2

1.9 ความเร็วสัมพัทธ์และมุมแบริง

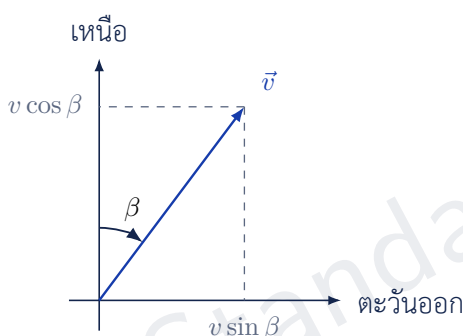
กำหนดแกน x ไปตะวันออกและแกน y ไปเหนือ มุมแบริง β วัดจากทิศเหนือตามเข็มนาฬิกา ความเร็วรวมต้องบวกเป็นเวกเตอร์ก่อนหาขนาด

หลักการและสูตร

$$\vec{v} = (v \sin \beta) \vec{i} + (v \cos \beta) \vec{j}$$

$$\vec{v}_{\text{พื้นดิน}} = \vec{v}_{\text{เทียบอากาศ}} + \vec{v}_{\text{ลม}}$$

v คืออัตราเร็วซึ่งไม่เป็นลบ ทิศของลมในสูตรหมายถึงทิศที่ลมพัดไป



ตัวอย่าง 9 อากาศยานมีอัตราเร็วเทียบอากาศ 24 กิโลเมตรต่อชั่วโมงในแบริง 30° และลมพัดไปในแบริง 330° ด้วยอัตราเร็ว 8 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาอัตราเร็วเทียบพื้นดิน

วิธีคิด องค์ประกอบตะวันออกคือ $24 \sin 30^\circ + 8 \sin 330^\circ = 12 - 4 = 8$ องค์ประกอบเหนือคือ $24 \cos 30^\circ + 8 \cos 330^\circ = 16\sqrt{3}$ ดังนั้นอัตราเร็วรวม

$$\sqrt{8^2 + (16\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{13}$$

ตอบ $8\sqrt{13}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

สรุป

รักษาจุดต้นและจุดปลายของลูกศร ใช้เวกเตอร์ตำแหน่งปลายลบต้น รวมส่วนประกอบก่อนหาขนาด และเทียบสัมประสิทธิ์ได้เมื่อใช้ฐานที่เป็นอิสระ จุดแบ่งและจุดตัดต้องตรวจสอบส่วนหรือช่วงพารามิเตอร์

เรื่อง เวกเตอร์

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 ให้ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ จงหา $\vec{u} + \vec{v}$

ตอบ

ข้อ 2 จงหาขนาดของ $-5\vec{i} + 12\vec{j}$

ตอบ

เรื่อง เวกเตอร์

ตอนที่ 3 เวกเตอร์สามมิติ การฉาย และระยะ

เป้าหมาย คำนวณส่วนประกอบในสามมิติ แยกปริมาณของการฉาย และใช้ความตั้งฉากหาระยะน้อยที่สุด

3.1 ส่วนประกอบและขนาดในสามมิติ

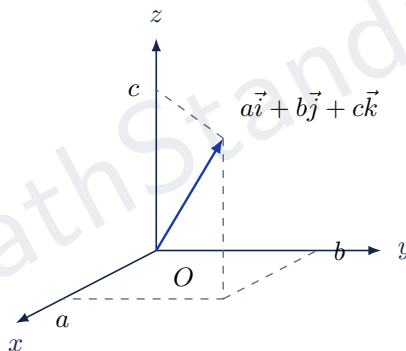
ใช้ระบบพิกัดฉากแบบมือขวา โดย $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน x, y, z ด้านบวกตามลำดับ ทั้งสามแกนตั้งฉากกัน ภาพบนกระดาษเป็นภาพฉายจึงอาจดูเหมือนมุมระหว่างแกนไม่ใช่มุมฉาก

หลักการและสูตร

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \quad |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf \quad \text{เมื่อ } \vec{v} = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$$

เวกเตอร์จาก P ไป Q ใช้พิกัดของ Q ลบ P แยกครบทั้งสามแกน



ตัวอย่าง 18 ให้ $P = (1, -2, 0)$ และ $Q = (3, -1, 2)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$

วิธีคิด ได้ $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ มีขนาด $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ จึงหารทุกส่วนประกอบด้วย 3

ตอบ $\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

3.2 โคไซน์แสดงทิศทาง

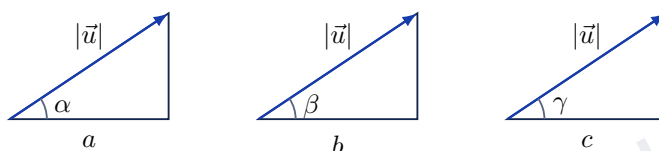
ให้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \neq \vec{0}$ ทำมุม α, β, γ กับแกน x, y, z ด้านบวกตามลำดับ ส่วนประกอบอาจติดลบ จึงต้องรักษาเครื่องหมายของโคไซน์

หลักการและสูตร

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\vec{u}|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{|\vec{u}|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{|\vec{u}|}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

ความสัมพันธ์นี้กำหนดขนาดของโคไซน์ที่เหลือ แต่ต้องใช้ทิศของเวกเตอร์เลือกเครื่องหมาย



ภาพองค์ประกอบกรณีเป็นบวก ส่วนประกอบลบให้มุมกับแกนด้านบวกเป็นมุมป้าน

ตัวอย่าง 19 ถ้า $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$ และส่วนประกอบแกน z ของ $\vec{u}$ เป็นบวก จงหา $\cos \gamma$

วิธีคิด ได้ $\cos^2 \gamma = 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$ จึง $\cos \gamma = \pm \frac{2}{3}$ แต่ส่วนประกอบแกน z เป็นบวก จึงเลือกค่าบวก

ตอบ $\frac{2}{3}$

3.3 ความตั้งฉากกับสองทิศทาง

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับสองทิศทางต้องผ่านสมการผลคูณเชิงสเกลาร์สองสมการพร้อมกัน เงื่อนไขนี้ยังไม่กำหนดขนาดโดยอัตโนมัติ ต้องใช้ส่วนประกอบหรือขนาดที่กำหนดเพิ่ม

หลักการและสูตร

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

ในการหามุมที่จุด A ให้เลือกเวกเตอร์ที่เริ่มจาก A เช่น $\vec{AB}$ และ $\vec{AC}$

ตัวอย่าง 20 ให้ $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}$ ตั้งฉากกับ $\vec{i} + \vec{k}$ และ $2\vec{j} - \vec{k}$ จงหา a, b

วิธีคิด สมการแรกให้ $a + 2 = 0$ สมการที่สองให้ $2b - 2 = 0$ จึง $a = -2, b = 1$ ตรวจสอบได้ผลคูณทั้งสองเป็นศูนย์

ตอบ $a = -2, b = 1$

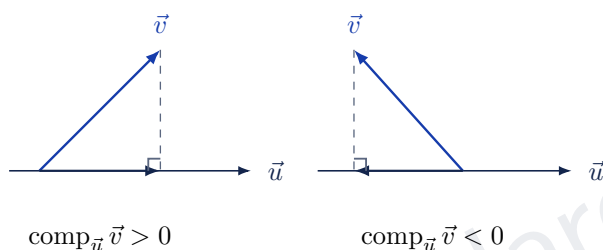
3.4 องค์ประกอบเชิงสเกลาร์ เวกเตอร์ฉาย และขนาด

การฉาย $\vec{v}$ ลงตามทิศ $\vec{u} \neq \vec{0}$ ให้ปริมาณต่างกันสามชนิด องค์ประกอบเชิงสเกลาร์เป็นจำนวนที่มีเครื่องหมาย เวกเตอร์ฉายชี้ตามหรือสวนแนวอ้างอิง ส่วนขนาดของเวกเตอร์ฉายไม่เป็นลบ

หลักการและสูตร

$$\text{comp}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}, \quad |\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|}$$



ตัวอย่าง 21 ให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ จงหาปริมาณการฉายทั้งสามชนิดของ $\vec{v}$ ลงตาม $\vec{u}$

วิธีคิด $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 4 = -2$ และ $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ จึงได้องค์ประกอบ $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ เวกเตอร์ฉาย $(-\frac{2}{5})(2\vec{i} + \vec{j})$ และ
ขนาด $\frac{2}{\sqrt{5}}$

ตอบ $\text{comp} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \text{proj} = -\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{2}{5}\vec{j}, \text{ขนาด} \frac{2}{\sqrt{5}}$

3.5 การแยกส่วนขนานและส่วนตั้งฉาก

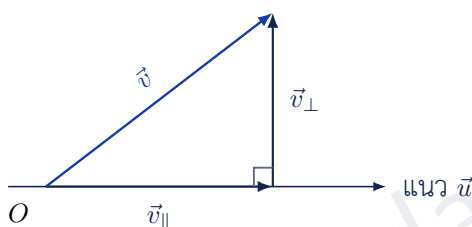
ให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ เป็นแนวอ้างอิง แยก $\vec{v}$ เป็นส่วนขนานกับ $\vec{u}$ และส่วนที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ โดยใช้เวกเตอร์ฉายเป็นส่วนขนาน

หลักการและสูตร

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \quad \vec{v}_{\parallel} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}, \quad \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{u} = 0$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_{\parallel}|^2 + |\vec{v}_{\perp}|^2$$



ตัวอย่าง 22 ให้ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$ จงแยก $\vec{v}$ เป็นส่วนขนานและส่วนตั้งฉากกับ $\vec{u}$

วิธีคิด $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ และ $|\vec{u}|^2 = 2$ ส่วนขนานจึงเป็น $2(\vec{i} + \vec{j})$ ส่วนตั้งฉากคือ $(3\vec{i} + \vec{j}) - (2\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j}$ ซึ่งคูณเชิงสเกลาร์กับ $\vec{u}$ ได้ศูนย์

ตอบ $\vec{v}_{\parallel} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}_{\perp} = \vec{i} - \vec{j}$

3.6 ระยะจากจุดถึงเส้นตรงและค่าน้อยที่สุด

ให้เส้นตรงผ่าน A มีทิศ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และให้ $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ สำหรับจุด P จุดบนเส้นเขียนเป็น $A + t\vec{u}$ ระยะถึง P จึงเป็น $|\vec{v} - t\vec{u}|$ การทำกำลังสองสมบูรณหาค่าน้อยที่สุดได้โดยไม่ใช้แคลคูลัส

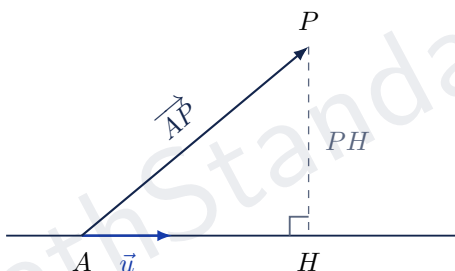
หลักการและสูตร

$$t_* = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}, \quad \overrightarrow{AH} = t_* \vec{u}$$

$$|\vec{v} - t\vec{u}|^2 = |\vec{u}|^2(t - t_*)^2 + |\vec{v}|^2 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2}$$

$$PH = \sqrt{|\vec{v}|^2 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2}}$$

H คือจุดฉายตั้งฉากบนเส้นตรง ไม่จำเป็นต้องอยู่บนส่วนของเส้นตรงที่กำหนด



ตัวอย่าง 23 เส้นตรงผ่าน $A = (1, 0, 0)$ มีทิศ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ จงหาระยะจาก $P = (3, 3, 1)$ ถึงเส้นตรงและจุดใกล้ที่สุด H

วิธีคิด ได้ $\vec{v} = \overrightarrow{AP} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ มี $|\vec{v}|^2 = 14$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, $|\vec{u}|^2 = 2$ จึง $t_* = \frac{5}{2}$ และ $H = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 0)$ อีกทางหนึ่ง

$$|\vec{v} - t\vec{u}|^2 = 2(t - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{2}$$

ระยะน้อยที่สุดคือ $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ตอบ $H = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 0)$ และระยะ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ หน่วย

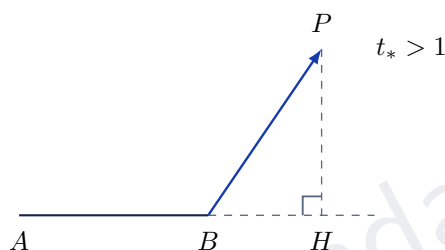
3.7 ระยะจากจุดถึงส่วนของเส้นตรง

สำหรับส่วนของเส้นตรง AB ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ และ $t_* = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}$ จุดที่ใกล้ P บนเส้นตรงจะเป็นคำตอบของส่วนของเส้นตรงได้เมื่ออยู่ในช่วง $0 \leq t_* \leq 1$

หลักการและสูตร

$t_* < 0$	จุดใกล้ที่สุดคือ A
$0 \leq t_* \leq 1$	ใช้จุดฉาย H
$t_* > 1$	จุดใกล้ที่สุดคือ B

ระยะถึงเส้นตรงกับระยะถึงส่วนของเส้นตรงอาจต่างกัน เพราะขอบเขตของพารามิเตอร์ต่างกัน



ตัวอย่าง 24 ให้ $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $P = (3, 2)$ จงหาระยะน้อยที่สุดจาก P ถึงส่วนของเส้นตรง AB
วิธีคิด $\vec{u} = 2\vec{i}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ได้ $t_* = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$ จุดฉายอยู่เลย B จึงเลือกปลาย B ระยะเป็น $PB = \sqrt{(3-2)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

ตอบ $\sqrt{5}$ หน่วย

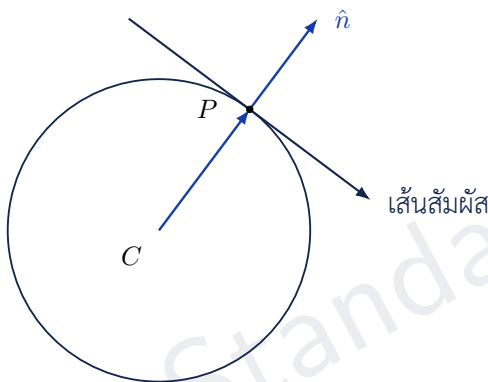
3.8 เวกเตอร์ปกติของวงกลม

วงกลมศูนย์กลาง $C = (h, k)$ รัศมี $r > 0$ มีเวกเตอร์รัศมีที่จุด P บนวงกลม ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส
 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยปกติที่ชี้ออกได้จากรัศมีหาด้วยความยาวรัศมี

หลักการและสูตร

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \quad \hat{n} = \frac{\overrightarrow{CP}}{r}$$

ถ้าเริ่มจากสมการวงกลมรูปทั่วไป ให้หาค่าทั้งสองสมบรูณ์หาศูนย์กลางและรัศมี แล้วตรวจว่า P อยู่
 บนวงกลมก่อน



ตัวอย่าง 25 วงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ มีจุด $P = (4, 2)$ บนวงกลม จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
 ปกติที่ P ซึ่งชี้ออก

วิธีคิด จัดรูปได้ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ จึงมี $C = (1, -2), r = 5$ และ $\overrightarrow{CP} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ มีขนาด 5
 เวกเตอร์ที่ต้องการคือ $\frac{\overrightarrow{CP}}{5}$

ตอบ $\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$

สรุป

คำนวณทุกแกนโดยรักษาเครื่องหมาย องค์ประกอบเชิงสเกลาร์อาจติดลบ แต่ขนาดไม่ติดลบ ส่วนที่เหลือ
 จากการฉายตั้งฉากกับแนวอ้างอิง การหาระยะถึงส่วนของเส้นตรงต้องตรวจช่วงของพารามิเตอร์เพิ่มเติม

เรื่อง เวกเตอร์

แบบฝึกหัดตอนที่ 3

ง่าย

ข้อ 41 ให้ $P = (-1, 2, 0)$ และ $Q = (2, 0, 6)$ จงหา $\overrightarrow{PQ}$ และขนาด

ตอบ

ข้อ 42 หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศเดียวกับ $2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$

ตอบ