



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

www.mathstandard.com

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.1

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ครอบคลุมมุม วงกลมหนึ่งหน่วย เอกลักษณ์ กราฟ สูตร แปลงมุม ฟังก์ชันผกผัน สมการ อสมการ และการแก้สามเหลี่ยม

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ จำนวนจริง สมการ อสมการ การแยกตัวประกอบ สมการกำลังสอง ความคล้าย และการอ่านกราฟ

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- มุมที่ไม่กำกับเครื่องหมายของศาใช้หน่วยเรเดียน มุมบวกวัดทวนเข็มนาฬิกาและมุมลบวัดตามเข็มนาฬิกา
- $k \in \mathbb{Z}$ แทนดัชนีจำนวนเต็มสำหรับคำตอบทั่วไปหรือคาบ และให้ Area แทนพื้นที่
- ในสามเหลี่ยม ABC ใช้ $a = BC, b = CA, c = AB$ ให้ด้านอยู่ตรงข้ามมุมที่ใช้อักษรเดียวกัน
- $\sin^2 x$ หมายถึง $(\sin x)^2$ ส่วน $\sin 2x$ หมายถึงไซน์ของมุม $2x$ ซึ่งเป็นคนละนิพจน์
- ใช้ $\arcsin, \arccos, \arctan$ แทนฟังก์ชันผกผัน และใช้ $\csc, \sec, \cot$ แทนอัตราส่วนส่วนกลับ
- ช่วงค่าหลักของฟังก์ชันผกผันยึดตามตารางในตอนที 5 โดยระบุข้อตกลงของ $\operatorname{arccot}, \operatorname{arcsec}, \operatorname{arccsc}$ ไว้ด้วย
- ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ กรณฑ์ต้องมีค่าจริง และคำตอบจากการยกกำลังสองต้องแทนตรวจในสมการเดิม
- กราฟใช้แกนนอนเป็นเรเดียน เว้นแต่ระบุหน่วยอื่น เส้นประแสดงเส้นช่วยหรือเส้นกำกับตามคำอธิบาย ไม่เป็นส่วนหนึ่งของกราฟ

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 มุม อัตราส่วน และวงกลมหนึ่งหน่วย	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–16	11
ตอนที่ 2 เอกลักษณ์และกราฟของฟังก์ชัน	
เนื้อหาและตัวอย่าง	21
แบบฝึกหัดข้อ 17–32	28
ตอนที่ 3 สูตรผลบวก ผลต่าง และการจัดรูป	
เนื้อหาและตัวอย่าง	38
แบบฝึกหัดข้อ 33–48	43
ตอนที่ 4 มุมหลายเท่าและการแปลงผลคูณ	
เนื้อหาและตัวอย่าง	53
แบบฝึกหัดข้อ 49–64	59

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

เนื้อหาและตัวอย่าง	69
แบบฝึกหัดข้อ 65–80	74

ตอนที่ 6 สมการและอสมการตรีโกณมิติ

เนื้อหาและตัวอย่าง	84
แบบฝึกหัดข้อ 81–96	89

ตอนที่ 7 การแก้สามเหลี่ยมและการวัด

เนื้อหาและตัวอย่าง	99
แบบฝึกหัดข้อ 97–112	106

ตอนที่ 8 การประยุกต์ข้ามบท

เนื้อหาและตัวอย่าง	116
แบบฝึกหัดข้อ 113–128	120
สรุปเนื้อหา เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	130
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	137
เฉลยเฉพาะคำตอบ	149
เฉลยวิธีคิด	157

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตอนที่ 1 มุม อัตราส่วน และวงกลมหนึ่งหน่วย

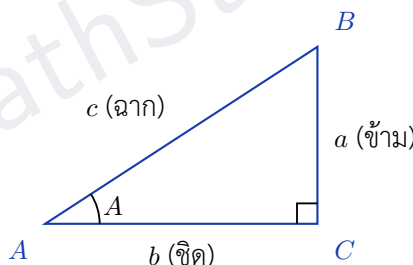
เป้าหมาย กำหนดด้านจากมุมอ้างอิง แปลงหน่วยมุม และใช้ วงกลมหนึ่ง หน่วย หา อัตราส่วน พร้อม เครื่องหมาย

1.1 อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้สามเหลี่ยม ABC มีมุมฉากที่ C และให้ $a = BC, b = CA, c = AB$ ด้านทั้งสามอยู่ตรงข้ามมุมที่ใช้ อักษรเดียวกัน ความคล้ายทำให้อัตราส่วนขึ้นกับมุม ไม่ขึ้นกับขนาดรูป

อัตราส่วนหลักและส่วนกลับ

$$\begin{array}{lll} \sin A = \frac{a}{c}, & \cos A = \frac{b}{c}, & \tan A = \frac{a}{b} \\ \csc A = \frac{c}{a}, & \sec A = \frac{c}{b}, & \cot A = \frac{b}{a} \\ \sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}, & \cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}, & \tan \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} \end{array}$$



- ข้ามคือด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง ชิดคือด้านประชิดมุมนั้นที่ไม่ใช่ด้านตรงข้ามมุมฉาก และฉากคือด้านตรงข้ามมุมฉาก
- เมื่อทราบอัตราส่วนหนึ่ง ให้สร้างสามเหลี่ยมตามสัดส่วน ใช้พีทาโกรัสหาด้านที่ขาด แล้วจึงหาอัตราส่วนอื่น

ตัวอย่าง 1 มุม A เป็นมุมแหลมและ $\tan A = \frac{8}{15}$ จงหา $\sin A, \cos A$

วิธีคิด สร้างสามเหลี่ยมให้ด้านข้ามยาว 8 และด้านชิดยาว 15 ด้านฉากยาว $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ แล้วหารด้วย ด้านฉาก

ตอบ $\sin A = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{15}{17}$

1.2 มุม หน่วยองศา และเรเดียน

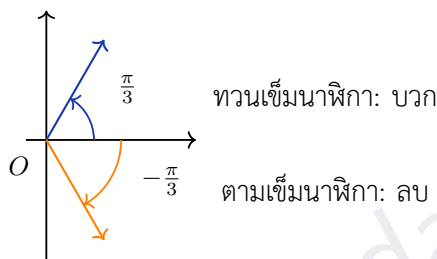
มุมในตำแหน่งมาตรฐานมีจุดยอดที่จุดกำเนิดและแขนเริ่มต้นอยู่บนแกน x บวก มุมบวกหมุนทวนเข็มนาฬิกา มุมลบหมุนตามเข็มนาฬิกา หนึ่งเรเดียนคือมุมที่รองรับส่วนโค้งยาวเท่ารัศมี

การแปลงหน่วย

$$180^\circ = \pi \text{ เรเดียน}, \quad 1^\circ = 60', \quad 1' = 60''$$

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \theta_{\text{deg}}, \quad \theta_{\text{deg}} = \frac{180}{\pi} \theta_{\text{rad}}$$

มุมร่วมปลายต่างกัน $2k\pi$ เรเดียน หรือ $360^\circ k$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$



ตัวอย่าง 2 แปลง 225° เป็นเรเดียน และหามุมร่วมปลายของ $-\frac{7\pi}{6}$ ที่อยู่ใน $[0, 2\pi)$

วิธีคิด $\frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$ และบวกหนึ่งรอบให้มุมลบได้ $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6}$

ตอบ $\frac{5\pi}{4}$ และ $\frac{5\pi}{6}$

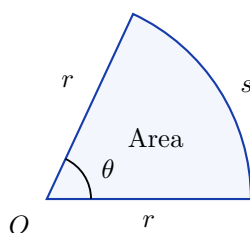
1.3 ส่วนโค้งและพื้นที่ส่วนของวงกลม

ให้ $r > 0$ เป็นรัศมี $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางในหน่วยเรเดียน s เป็นความยาวส่วนโค้ง และ Area เป็นพื้นที่ส่วนของวงกลมที่มุมนี้รองรับ

ใช้สูตรต่อไปนี้รอบ

$$s = r\theta, \quad \text{Area} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rs$$

ถ้ามุมเป็นองศา ใช้ $s = 2\pi r\left(\frac{\theta}{360^\circ}\right)$ และ $\text{Area} = \pi r^2\left(\frac{\theta}{360^\circ}\right)$



- ความยาวใช้หน่วยเชิงเส้น พื้นที่ใช้หน่วยกำลังสอง และต้องใช้หน่วยเดียวกันก่อนแทนค่า

ตัวอย่าง 3 ส่วนของวงกลมมีรัศมี 9 เซนติเมตรและมุม 80° จงหา s และพื้นที่

วิธีคิด มุมเท่ากับ $\frac{4\pi}{9}$ เรเดียน จึงมี $s = 9\left(\frac{4\pi}{9}\right) = 4\pi$ และพื้นที่ $\frac{1}{2}(9^2)\left(\frac{4\pi}{9}\right) = 18\pi$

ตอบ $s = 4\pi$ เซนติเมตร และพื้นที่ 18π ตารางเซนติเมตร

1.4 วงกลมหนึ่งหน่วยและเครื่องหมาย

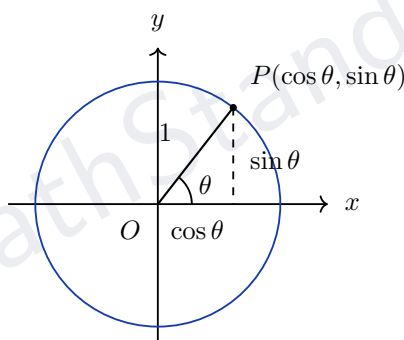
วงกลมหนึ่งหน่วยมีศูนย์กลาง $O(0, 0)$ และรัศมีหนึ่ง เมื่อแขนปลายของมุม θ ตัดที่ $P(x, y)$ นิยามโคไซน์จากพิกัดแนวนอนและไซน์จากพิกัดแนวตั้ง

พิกัดและข้อห้าม

$$P = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\cos \theta \neq 0)$$

$\sec \theta$ นิยามเมื่อ $\cos \theta \neq 0$ ส่วน $\csc \theta, \cot \theta$ นิยามเมื่อ $\sin \theta \neq 0$

ควอดรันต์	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-



- $-1 \leq \sin \theta, \cos \theta \leq 1$ และเครื่องหมายของแทนเจนต์ได้จากผลหาร

ตัวอย่าง 4 ให้ $\sin \theta = -\frac{5}{13}$ และ $\cos \theta < 0$ จงหา $\cos \theta, \tan \theta$

วิธีคิด มุมอยู่ควอดรันต์ III จึงเลือกโคไซน์ลบ ได้ $\cos \theta = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$ แล้วหารไซน์ด้วยโคไซน์

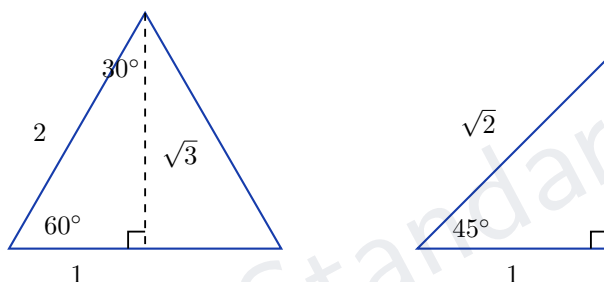
ตอบ $\cos \theta = -\frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}$

1.5 มุมสำคัญและมุมอ้างอิง

สามเหลี่ยมด้านเท่าแบ่งครึ่งให้สัดส่วน $1 : \sqrt{3} : 2$ และสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วให้สัดส่วน $1 : 1 : \sqrt{2}$ จึงสร้างตารางค่ามุมสำคัญได้ มุมอ้างอิงคือมุมแหลมที่แขนปลายทำกับแกน x

ค่าที่ใช้บ่อย

มุม	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม



- ใช้มุมอ้างอิงหาขนาด แล้วกำหนดเครื่องหมายจากควอดรนต์ สำหรับมุมบนแกนให้ใช้พิกัดโดยตรง

ตัวอย่าง 5 หาค่า $2 \sin 150^\circ - \cos 240^\circ + \tan 315^\circ$

วิธีคิด มุมอ้างอิงคือ $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ ตามลำดับ ได้ $2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)$

ตอบ $\frac{1}{2}$

1.6 สมมาตรและมุมประกอบกัน

การสะท้อนจุดบนวงกลมเปลี่ยนเครื่องหมายฟังก์ชันบางตัว ส่วนการหมุนหนึ่งรอบกลับมายังจุดเดิม จึงได้สมบัติต่อไปนี้เมื่อทั้งสองข้างนิยาม

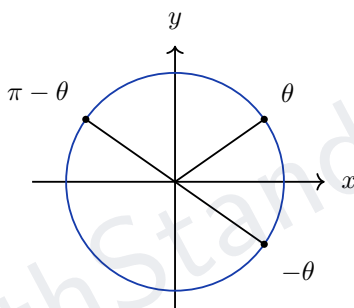
สมบัติพื้นฐานของมุม

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \tan(x + \pi) = \tan x$$



- มุมเต็มเต็มรวมกัน $\frac{\pi}{2}$ การสลับชื่อเป็นฟังก์ชันร่วม เช่น sine กับ cosine และ tangent กับ cotangent ช่วยจำความเท่ากัน
- ไซน์และแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันคี่ โคไซน์เป็นฟังก์ชันคู่ ให้ตรวจโดเมนสมมาตรก่อนใช้กับฟังก์ชันประกอบ

ตัวอย่าง 6 ให้ $f(x) = 2 \sin x + 3x \cos x + 5x^2$ และ $f(2) = 7$ จงหา $f(-2)$

วิธีคิด สองพจน์แรกเป็นฟังก์ชันคี่ ส่วน $5x^2$ เป็นฟังก์ชันคู่ จึงมี $f(2) + f(-2) = 2(5)(2^2) = 40$

ตอบ 33

1.7 เอกลัษณ์พีทาโกรัสและส่วนสูง

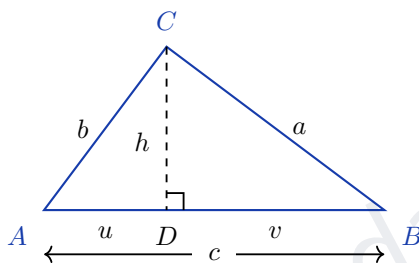
จาก $x^2 + y^2 = 1$ บนวงกลมหนึ่งหน่วยได้เอกลัษณ์หลัก การหารด้วยกำลังสองของไซน์หรือโคไซน์ให้สูตรส่วนกลับโดยคงข้อห้ามของตัวหาร

สูตรพื้นฐาน

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sec^2 x - \tan^2 x = 1, \quad \csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

ในสามเหลี่ยมมุมฉากที่ C ลาก $CD \perp AB$ ให้ $AD = u, DB = v, CD = h$ จะได้

$$h^2 = uv, \quad b^2 = cu, \quad a^2 = cv, \quad ab = ch, \quad c = u + v$$



- สัญลักษณ์ a, b, c ยังคงอยู่ตรงข้าม A, B, C และ u, v, h เป็นความยาวที่นิยามเฉพาะในรูปนี้

ตัวอย่าง 7 ให้สามเหลี่ยมมุมฉากที่ C มี $AC = 9, BC = 12$ จงหาส่วนสูง CD และ AD

วิธีคิด ได้ $AB = 15$ ใช้พื้นที่เท่ากัน $CD = \frac{9(12)}{15} = \frac{36}{5}$ และ $AC^2 = AB \cdot AD$ จึง $AD = \frac{81}{15} = \frac{27}{5}$

ตอบ $CD = \frac{36}{5}, AD = \frac{27}{5}$ หน่วย

สรุป

กำหนดมุมอ้างอิงก่อนเลือกด้าน แปลงหน่วยก่อนใช้สูตรส่วนโค้ง และใช้พิทักบนวงกลมหนึ่งหน่วยกำหนดเครื่องหมาย การถอดรากของกำลังสองให้ค่าสมบูรณ์

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 แปลง 210° เป็นเรเดียน และ $-\frac{5\pi}{4}$ เป็นองศา

ตอบ

ข้อ 2 มุมแหลม A มี $\tan A = \frac{7}{24}$ จงหา $\sin A$ และ $\sec A$

ตอบ

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตอนที่ 2 เอกลักษณะและกราฟของฟังก์ชัน

เป้าหมาย จัดรูปเอกลักษณะโดยรักษาโดเมน อ่านกราฟฟังก์ชัน และวิเคราะห์คาบ เรนจ์ และการแปลงกราฟ

2.1 การจัดรูปเอกลักษณะ

เอกลักษณะเป็นความเท่ากันที่จริงสำหรับทุกค่าซึ่งทั้งสองข้างนิยาม เริ่มจากข้างที่ซับซ้อน เปลี่ยนส่วนกลับเป็นไซน์และโคไซน์ แล้วรวมส่วน แยกตัวประกอบ หรือคูณพจน์สังยุค

ผลบวกและผลต่าง

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$$

$$(\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x) = 1$$

$$(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x) = 1$$

- การลดรูปไม่ทำให้โดเมนของนิพจน์เดิมเพิ่มขึ้น และ $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$

ตัวอย่าง 8 ลดรูป $\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$ และระบุข้อห้าม

วิธีคิด แทนเศษด้วย $\sin^2 x$ แล้วตัด $\sin x$ โดยต้องมี $\sin x \neq 0$ จึงคงข้อห้าม $x \neq k\pi$

ตอบ $\sin x$ เมื่อ $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.2 กำลังสูงของไซน์และโคไซน์

ให้ $u = \sin^2 x, v = \cos^2 x$ จึงมี $u + v = 1$ ใช้เอกลักษณ์พีชคณิต $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv$ และ $u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3uv(u + v)$

ลดกำลังด้วยผลคูณ

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x \cos x \leq \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 9 ถ้า $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$ จงหา $\sin^4 x + \cos^4 x$

วิธีคิด ยกกำลังสองได้ $1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{25}$ จึงมีผลคูณ $\frac{12}{25}$ แทนในสูตรกำลังสี่ได้ $1 - 2\left(\frac{12}{25}\right)^2$

ตอบ $\frac{337}{625}$

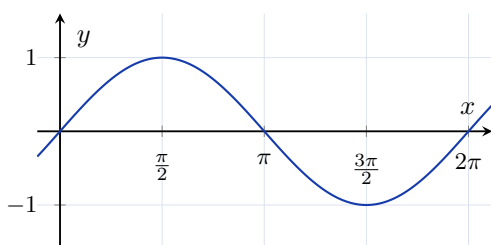
2.3 กราฟไซน์และโคไซน์

ไซน์และโคไซน์นิยามทุกจำนวนจริง มีเรนจ์ $[-1, 1]$ และคาบบวกน้อยที่สุด 2π อ่านจุดสำคัญทุกหนึ่งในสี่คาบแล้วเชื่อมเป็นเส้นโค้งเรียบ

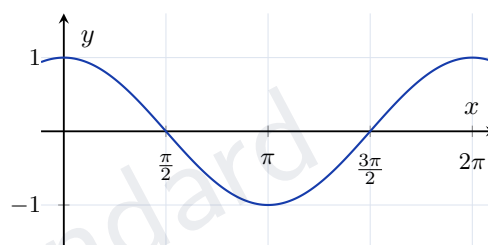
จุดสำคัญในหนึ่งคาบ

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$



- ค่าสูงสุดและต่ำสุดบนช่วงจำกัดต้องเกิดภายในช่วงจริง โดยเฉพาะเมื่อปลายช่วงเปิด

ตัวอย่าง 10 หาเรนจ์ของ $\sin x$ เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

วิธีคิด ไซน์เพิ่มจากค่าที่เข้าใกล้ 0 ไปยังค่าที่เข้าใกล้ 1 แต่ปลายทั้งสองไม่รวม จึงไม่เกิดค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด

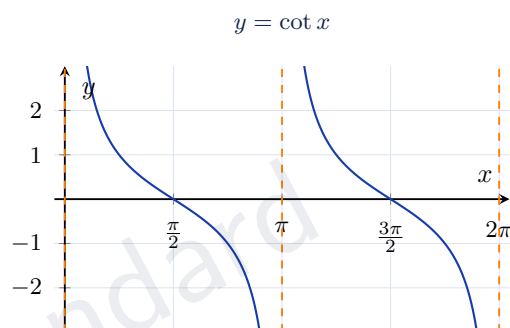
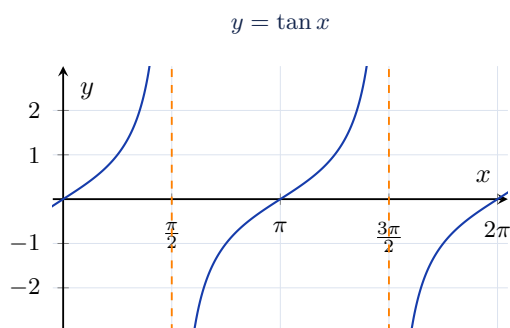
ตอบ $(0, 1)$

2.4 กราฟแทนเจนต์และโคแทนเจนต์

ให้ $k \in \mathbb{Z}$ จุดที่ตัวส่วนเป็นศูนย์เป็นตำแหน่งเส้นกำกับแนวตั้ง ไม่ใช่จุดบนกราฟ กราฟมีหลายสาขาและไม่เชื่อมข้ามเส้นกำกับ

โดเมน เรนจ์ และคาบ

ฟังก์ชัน	ข้อห้าม	เรนจ์	คาบ
$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\mathbb{R}$	π
$\cot x$	$x \neq k\pi$	$\mathbb{R}$	π



- แทนเจนต์เพิ่มในแต่ละช่วงระหว่างเส้นกำกับ ส่วนโคแทนเจนต์ลดในแต่ละช่วง ไม่สรุปการเพิ่มลดข้ามจุดที่ไม่นิยาม

ตัวอย่าง 11 หาเส้นกำกับที่ล้อม $x = \frac{\pi}{6}$ ของ $y = \tan(3x - \frac{\pi}{2})$

วิธีคิด เขียนมุมเป็น $3(x - \frac{\pi}{6})$ รอบศูนย์มุมมีเส้นกำกับเมื่อมุมเท่ากับ $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ จึงแก้ได้ $x = 0, \frac{\pi}{3}$

ตอบ $x = 0$ และ $x = \frac{\pi}{3}$

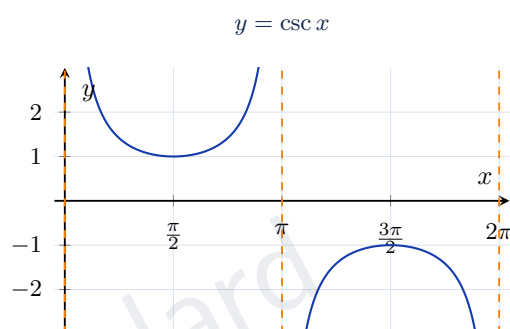
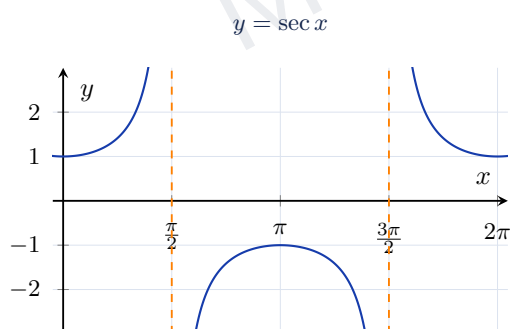
2.5 กราฟซีแคนต์และโคซีแคนต์

ซีแคนต์เป็นส่วนกลับของโคไซน์ โคซีแคนต์เป็นส่วนกลับของไซน์ ใช้ศูนย์ของฟังก์ชันต้นแบบเป็นเส้นกำกับ แล้วพิจารณาเครื่องหมายในแต่ละช่วง

ขอบเขตของส่วนกลับ

$$\text{Range}(\sec x) = \text{Range}(\csc x) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

คาบของทั้งสองฟังก์ชันเท่ากับ 2π และมีข้อห้ามตามตัวส่วน



ตัวอย่าง 12 หาเรนจ์ของ $y = 3 \sec(2x) - 1$

วิธีคิด เมื่อ $\sec(2x) \leq -1$ ได้ $y \leq -4$ และเมื่อ $\sec(2x) \geq 1$ ได้ $y \geq 2$

ตอบ $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$

2.6 แอมพลิจูด คาบ และการเลื่อนกราฟ

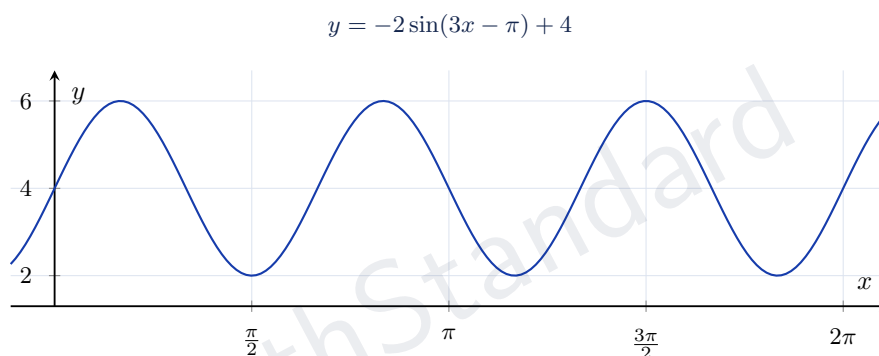
เขียนเป็น $y = a \sin b(x - h) + d$ หรือ $y = a \cos b(x - h) + d$ โดย $a, b \neq 0$ ให้ h เป็นระยะเลื่อนแนวนอน และ d เป็นระดับเส้นกึ่งกลาง

พารามิเตอร์ของคลื่น

$$\text{แอมพลิจูด} = |a|, \quad T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \text{เรนจ์} = [d - |a|, d + |a|]$$

$$d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}, \quad |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$$

แทนเจนต์และโคแทนเจนต์ใช้ $T = \frac{\pi}{|b|}$ และไม่มีแอมพลิจูด ส่วนซีแคนต์และโคซีแคนต์ใช้ $T = \frac{2\pi}{|b|}$



- ต้องดึง b ออกจากมุมก่อนอ่าน h ถ้า $a = 0$ หรือ $b = 0$ ต้องตรวจนิยามแยก ไม่ใช่สูตรคาบของกราฟที่ไม่คงตัว

ตัวอย่าง 13 วิเคราะห์ $y = -2 \sin(3x - \pi) + 4$

วิธีคิด จัดมุมเป็น $3(x - \frac{\pi}{3})$ จึงเลื่อนขวา $\frac{\pi}{3}$ แอมพลิจูด 2 เส้นกึ่งกลาง $y = 4$ และคาบ $\frac{2\pi}{3}$

ตอบ แอมพลิจูด 2 คาบ $\frac{2\pi}{3}$ เรนจ์ $[2, 6]$

2.7 ค่าสัมบูรณ์ กรณท์ และโดเมน

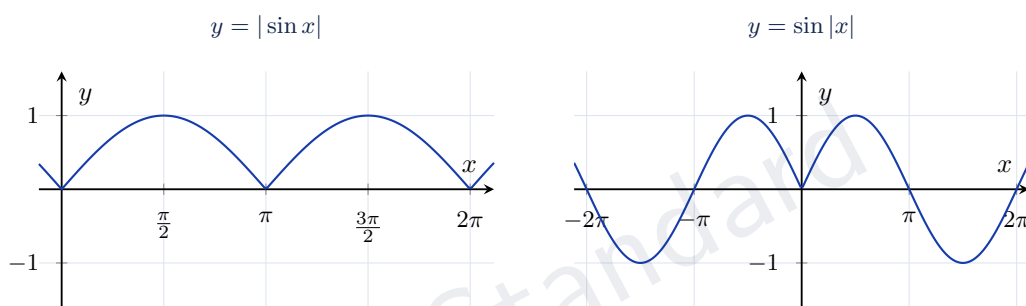
กราฟ $|\sin x|$ สะท้อนส่วนที่อยู่ใต้แกน x ขึ้นบน ส่วน $\sin |x|$ เก็บกราฟด้านขวาแล้วสะท้อนผ่านแกน y การดำเนินการทั้งสองให้กราฟต่างกัน

ข้อจำกัดก่อนอ่านกราฟ

$\sqrt{g(x)}$ นิยามเมื่อ $g(x) \geq 0$, $\frac{1}{g(x)}$ นิยามเมื่อ $g(x) \neq 0$

$$\sqrt{a^2 \cos^2 x} = |a \cos x|$$

$|\sin bx|$ มีคาบ $\frac{\pi}{|b|}$ เมื่อ $b \neq 0$ แต่ $\sin |bx|$ ไม่มีคาบบวกบน $\mathbb{R}$



- ข้อสรุปเรื่องคาบของค่าสัมบูรณ์ต้องตรวจรูปฟังก์ชัน ไม่สลับค่าสัมบูรณ์ของค่าฟังก์ชันกับค่าสัมบูรณ์ของตัวแปร

ตัวอย่าง 14 หาโดเมนของ $\sqrt{\cos x}$ รอบจุด 0 และขยายเป็นคำตอบทั่วไป

วิธีคิด ต้องมี $\cos x \geq 0$ บนวงกลมได้ช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ แล้วเลื่อนด้วยคาบ $2k\pi$

ตอบ $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

สรุป

แยกโดเมนจากรูปที่ลดแล้ว กราฟส่วนกลับมีเส้นกำกับตรงศูนย์ของตัวส่วน ดึงสัมประสิทธิ์ของมุมก่อนอ่านระยะเลื่อน และตรวจปลายช่วงก่อนสรุปค่าสุดขีด

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แบบฝึกหัดตอนที่ 2

ง่าย

ข้อ 17 หาค่า $3(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2(\sec^2 y - \tan^2 y)$ เมื่อทุกพจน์นิยาม

ตอบ

ข้อ 18 ลดรูป $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$ และระบุข้อห้าม

ตอบ