



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง เซต

www.mathstandard.com

เรื่อง เซต

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.4

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง เซต ครอบคลุม ความหมายและชนิดของเซต เอกภพสัมพัทธ์ สับเซต เพาเวอร์เซต การดำเนินการของเซต การพิสูจน์ และจำนวนสมาชิก

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ จำนวนจริง การแยกตัวประกอบ สมการ และอสมการเบื้องต้น

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ไม่รวมศูนย์ และ $n(A)$ ใช้นับสมาชิกของเซตจำกัด A
- $A \subseteq B$ ยอมให้เซตเท่ากัน ส่วน $A \subsetneq B$ หมายถึงสับเซตแท้
- $\mathcal{P}(A)$ แทนเพาเวอร์เซต ส่วน $P(E)$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E
- ส่วนเติมเต็มอ้างอิงเอกภพที่ระบุในข้อนั้น คำว่า “หรือ” รวมกรณีที่ทั้งสองเงื่อนไขเป็นจริง
- จำนวนและตัวอักษรพื้นฐานที่เขียนเป็นสมาชิกไม่ถือเป็นเซต เว้นแต่โจทย์ระบุเป็นอย่างอื่น
- คำตอบแบบจำนวนสมาชิกต้องเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ เศษส่วนเขียนอย่างต่ำ และปริมาณในสถานการณ์ต้องมีหน่วยที่เหมาะสม

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง เซต

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 ภาษาเซตและชนิดของเซต	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–14	7
ตอนที่ 2 สับเซตและเพาเวอร์เซต	
เนื้อหาและตัวอย่าง	15
แบบฝึกหัดข้อ 15–34	20
ตอนที่ 3 การดำเนินการและการให้เหตุผล	
เนื้อหาและตัวอย่าง	31
แบบฝึกหัดข้อ 35–54	36
ตอนที่ 4 จำนวนสมาชิกและขอบเขต	
เนื้อหาและตัวอย่าง	47
แบบฝึกหัดข้อ 55–72	52

เรื่อง เซต

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 การสำรวจและร้อยละ

เนื้อหาและตัวอย่าง	62
แบบฝึกหัดข้อ 73–88	66

ตอนที่ 6 เซตจำนวนเต็มและการนับ

เนื้อหาและตัวอย่าง	75
แบบฝึกหัดข้อ 89–102	78

ตอนที่ 7 การประยุกต์ร่วมกับบทอื่น

เนื้อหาและตัวอย่าง	86
แบบฝึกหัดข้อ 103–116	90
สรุปเนื้อหา เรื่อง เซต	98
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	104
เฉลยเฉพาะคำตอบ	113
เฉลยวิธีคิด	120

เรื่อง เซต

ตอนที่ 1 ภาษาเซตและชนิดของเซต

เป้าหมาย อธิบายเซตและสมาชิก เขียนเซต และจำแนกชนิดของเซต

1.1 ความหมายของเซตและสมาชิก

เซต คือกลุ่มของสิ่งที่มีเกณฑ์ระบุสมาชิกแน่นอน ให้ A แทนเซต และ x แทนสิ่งที่พิจารณา

สัญลักษณ์สมาชิก

$x \in A$ อ่านว่า x เป็นสมาชิกของ A ส่วน $x \notin A$ หมายถึง x ไม่เป็นสมาชิกของ A ตัวอักษร A แทนเซต และ x แทนสิ่งที่กำลังพิจารณา

- เขียนสมาชิกในวงเล็บปีกกา และคั่นสมาชิกด้วยจุลภาค
- ลำดับและการเขียนสมาชิกซ้ำไม่เปลี่ยนเซต เช่น $\{1, 3, 1\} = \{3, 1\}$
- ข้อความเชิงความคิดเห็นต้องมีเกณฑ์แน่นอนก่อนใช้กำหนดเซต

ตัวอย่าง 1 เขียนเซตของสระภาษาอังกฤษในคำว่า MATHEMATICS และหาจำนวนสมาชิก

วิธีคิด พิจารณาเฉพาะตัวที่เป็นสระ จะพบ A, E และ I ตัว A ที่ปรากฏซ้ำไม่เพิ่มสมาชิกใหม่

ตอบ เซตคือ $\{A, E, I\}$ มีสมาชิก 3 ตัว

1.2 การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข

การเขียนเซตมีสองรูปแบบ คือ **แจกแจงสมาชิก** และ **บอกเงื่อนไข**

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 3\} = \{-1, 0, 1, 2\}$$

รูปแบบ	หลักการเขียน
แจกแจงสมาชิก	เขียนสมาชิกที่ต่างกันครบ และใช้จุดไข่ปลาเฉพาะเมื่อแบบรูปชัดเจน
บอกเงื่อนไข	ระบุชนิดตัวแปร เงื่อนไข และการรวมปลายช่วงให้ชัด

- รูปบอกเงื่อนไขต้องระบุชนิดตัวแปรและเงื่อนไขของสมาชิก
- | ในวงเล็บปีกกาอ่านว่า “โดยที่” ส่วน $d \mid x$ อ่านว่า d หาร x ลงตัว
- ตรวจการรวมปลายช่วง และใช้จุดไข่ปลาเมื่อแบบรูปชัดเจน

ตัวอย่าง 2 ให้ $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 4\}$ จงแจกแจงสมาชิก

วิธีคิด ตัวแปรต้องเป็นจำนวนเต็ม ไม่รวม -2 แต่รวม 4 จึงเรียงจาก -1 ถึง 4

ตอบ $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

1.3 เอกภพสัมพัทธ์และเซตจำนวน

เอกภพสัมพัทธ์ U คือขอบเขตของสมาชิกที่พิจารณาในบริบทนั้น

สัญลักษณ์	ความหมายที่ใช้ในเอกสาร
$\mathbb{N}$	จำนวนนับ $\{1, 2, 3, \dots\}$ ไม่รวมศูนย์
$\mathbb{Z}$	จำนวนเต็ม $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	จำนวนตรรกยะ เขียนเป็น $\frac{p}{q}$ ได้ เมื่อ $p, q \in \mathbb{Z}$ และ $q \neq 0$
$\mathbb{R}$	จำนวนจริง ประกอบด้วยจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

- เงื่อนไขเดียวกันอาจให้เซตคำตอบต่างกันเมื่อเปลี่ยนเอกภพ
- ในเอกสารนี้ $\mathbb{N}$ ไม่รวมศูนย์

ตัวอย่าง 3 หาเซตคำตอบของ $x^2 = 36$ เมื่อพิจารณาใน $\mathbb{R}$ และใน $\mathbb{N}$

วิธีคิด จาก $(x-6)(x+6) = 0$ ได้ $x = -6$ หรือ 6 ในจำนวนจริงเลือกได้ทั้งสองค่า แต่ในจำนวนนับเลือกเฉพาะค่าบวก

ตอบ ใน $\mathbb{R}$ ได้ $\{-6, 6\}$ และใน $\mathbb{N}$ ได้ $\{6\}$

1.4 เซตว่าง เซตจำกัด และเซตอนันต์

เซตว่าง ไม่มีสมาชิก เขียน $\emptyset$ หรือ $\{\}$

เซตว่างและเซตที่มีเซตว่างเป็นสมาชิก

$$n(\emptyset) = 0, \quad n(\{\emptyset\}) = 1, \quad n(\{0\}) = 1$$

$\{\emptyset\} \neq \{0\}$ แม้ทั้งสองเซตมีสมาชิกหนึ่งตัว

- เซตจำกัดมีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ ใช้ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของ A
- เซตว่างเป็นเซตจำกัด ส่วนเซตที่ไม่จำกัดเรียกว่าเซตอนันต์
- สูตรนับสมาชิกในบทนี้ใช้กับเซตจำกัด

ตัวอย่าง 4 ให้ $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 0\}$ จงหา $n(A)$ และพิจารณาว่า $\{0\} \in A$ หรือไม่

วิธีคิด รายการสมาชิกมีเซตว่าง เซตที่มีเซตว่างหนึ่งตัว และจำนวนศูนย์ รวมสามตัว แต่เซต $\{0\}$ ไม่ได้อยู่ในรายการ

ตอบ $n(A) = 3$ และ $\{0\} \notin A$

1.5 ความเท่ากันของเซต

เกณฑ์เซตเท่ากัน

$A = B \iff$ สมาชิกของ A และ B เหมือนกันทุกตัว

เซตเท่ากัน ต้องมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว

- จำนวนสมาชิกเท่ากันยังไม่รับรองว่าเซตเท่ากัน
- เซตที่นิยามด้วยสมการ: แก้สมการ แล้วเลือกเฉพาะคำตอบในเอกภพก่อนเปรียบเทียบ

ตัวอย่าง 5 ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 = 0\}$ และ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x - 3)(x + 3) = 0\}$ ตรวจสอบว่า $A = B$ หรือไม่

วิธีคิด ทั้งสองสมการมีราก $-3, 3$ และรากเหล่านี้เป็นจำนวนเต็ม จึงอยู่ในเอกภพของทั้งสองเซต

ตอบ $A = B = \{-3, 3\}$

สรุป

เซตมีเกณฑ์กำหนดสมาชิกแน่นอน ลำดับและการเขียนสมาชิกซ้ำไม่เปลี่ยนเซต เอกภพมีผลต่อเซตคำตอบ
เซตว่างไม่มีสมาชิก และแตกต่างจากเซตที่มีเซตว่างเป็นสมาชิก

เรื่อง เซต

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 เขียน $A = \{2, 5, 2, 7, 5\}$ โดยไม่ซ้ำสมาชิก และหา $n(A)$

ตอบ

ข้อ 2 แจกแจง $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$

ตอบ

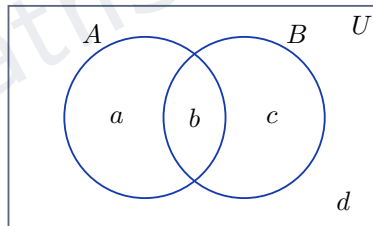
เรื่อง เซต

ตอนที่ 3 การดำเนินการและการให้เหตุผล

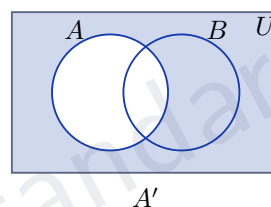
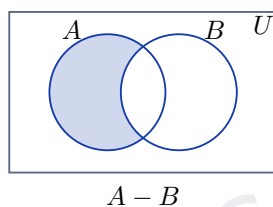
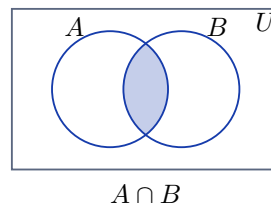
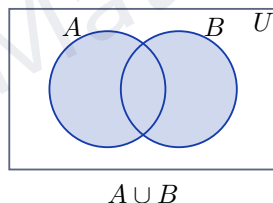
เป้าหมาย ดำเนินการของเซต จัดรูปนิพจน์ และพิสูจน์ความสัมพันธ์ของเซต

3.1 การดำเนินการพื้นฐานและแผนภาพเวนน์

กำหนด $A, B \subseteq U$ แผนภาพเวนน์ใช้วงปิดแทนเซต และสี่เหลี่ยมแทนเอกภพ



การดำเนินการ	เงื่อนไขของสมาชิก
$A \cup B$ ยูเนียน	อยู่ใน A หรือ B อย่างน้อยหนึ่งเซต รวมกรณีอยู่ทั้งคู่
$A \cap B$ อินเตอร์เซกชัน	อยู่ใน A และ B พร้อมกัน
$A - B$ ผลต่าง	อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B
$A' = U - A$ ส่วนเติมเต็ม	อยู่ใน U แต่ไม่อยู่ใน A



- ชื่อบริเวณในภาพ: $a = A - B$, $b = A \cap B$, $c = B - A$ และ d อยู่นอกทั้งสองเซต
- a, b, c, d ในภาพนี้เป็นชื่อบริเวณ มิใช่จำนวนสมาชิก
- ขนาดพื้นที่ในแผนภาพไม่แทนจำนวนสมาชิก เว้นแต่ระบุสัดส่วน

ตัวอย่าง 13 ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{3, 4, 5\}$ หา $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A'

วิธีคิด รวบรวมไม่ซ้ำได้ 1, 3, 4, 5 สมาชิกที่อยู่ทั้งคู่คือ 3, 5 ตัดส่วนร่วมจาก A เหลือ 1 ส่วนเติมเต็มต้องอ้างอิง U จึงเลือก 2, 4, 6, 7

ตอบ $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1\}$ และ $\{2, 4, 6, 7\}$ ตามลำดับ

3.2 สมบัติที่ใช้จัดรูป

สมบัติต่อไปนี้ใช้กับสับเซตของเอกภพเดียวกัน

สลับที่ เปลี่ยนหมู่ และแจกแจง

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A & A \cap B &= B \cap A \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

เซตว่าง เอกภพ ส่วนเติมเต็ม และการดูดกลืน

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A & A \cap U &= A \\ A \cup U &= U & A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup A &= A & A \cap A &= A \\ A \cup A' &= U & A \cap A' &= \emptyset \\ (A')' &= A & \emptyset' &= U \\ A \cup (A \cap B) &= A & A \cap (A \cup B) &= A \end{aligned}$$

นอกจากนี้ $U' = \emptyset$

- ใช้วงเล็บระบุขอบเขตของการดำเนินการ
- ไม่ใช้กฎตัดพจน์ของจำนวนกับนิพจน์เซตโดยอัตโนมัติ

3.3 กฎของเดอมอร์แกนและผลต่าง

ส่วนเติมเต็มพิจารณาภายในเอกภพเดียวกันเสมอ

การเปลี่ยนส่วนเติมเต็ม

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A - B = A \cap B'$$

- นอกยูเนียน: ต้องอยู่นอกทุกเซต
- นอกอินเตอร์เซกชัน: ต้องไม่อยู่ในอย่างน้อยหนึ่งเซต

ตัวอย่าง 14 จัดรูป $(A - B) \cap (B \cup C)$

วิธีคิด เปลี่ยนผลต่างเป็น $A \cap B'$ แล้วแจกแจง

$$A \cap B' \cap (B \cup C) = (A \cap B' \cap B) \cup (A \cap B' \cap C)$$

พจน์แรกเป็นเซตว่าง จึงเหลือสมาชิกที่อยู่ใน A, C และไม่อยู่ใน B

ตอบ $(A \cap C) - B$

3.4 การพิสูจน์ด้วยสมาชิกและตารางสมาชิก

การพิสูจน์ว่าเซตเท่ากันต้องครอบคลุมสมาชิกทั่วไป

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	A'
0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

- วิธีสมาชิก: เลือก $x \in U$ ใด ๆ แล้วแสดงว่าเงื่อนไขสมาชิกของสองข้างสมมูลกัน
- วิธีสับเซต: แสดงการเป็นสับเซตทั้งสองทิศทาง
- วิธีตารางสมาชิก: ตรวจสอบสถานะอยู่หรือไม่อยู่ของสมาชิกให้ครบทุกกรณี
- เซตตัวอย่างเพียงชุดเดียวไม่เพียงพอสำหรับยืนยันข้อความทั่วไป

ตัวอย่าง 15 พิสูจน์ว่า $A - (A - B) = A \cap B$

วิธีคิด ให้ $x \in U$ จะอยู่ในซ้ายเมื่อ $x \in A$ แต่ไม่อยู่ใน $A - B$ เมื่อทราบแล้วว่า $x \in A$ การไม่อยู่ใน $A - B$ บ่งชี้ว่า $x \in B$ จึงเทียบเท่ากับอยู่ทั้ง A และ B

ตอบ ทั้งสองเซตเท่ากัน

ตัวอย่าง 16 ข้อความ $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$ จริงเสมอหรือไม่

วิธีคิด เลือก $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ และ $C = \emptyset$ ส่วนร่วมทั้งคู่เป็นเซตว่าง แต่ $A \neq B$ กรณีเดียวที่ขัดแย้งเพียงพอก็คือคำว่า “จริงเสมอ”

ตอบ ไม่จริงเสมอ

3.5 สับเซต การอนุมาน และเพาเวอร์เซต

ความสัมพันธ์สับเซตเชื่อมโยงกับการดำเนินการและเพาเวอร์เซตได้ดังนี้

รูปสมมูลของความสัมพันธ์สับเซต

$$A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A - B = \emptyset$$

$$A \subseteq B \iff \forall x \in U [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

$$A \not\subseteq B \iff \exists x \in U [x \in A \text{ และ } x \notin B]$$

เพาเวอร์เซตกับการดำเนินการ

$$A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

- $\forall$ อ่านว่า “สำหรับทุก” และ $\exists$ อ่านว่า “มีอย่างน้อยหนึ่ง”
- ปฏิเสธการเป็นสับเซตโดยหาสมาชิกที่ไม่อยู่ในอีกเซตอย่างน้อยหนึ่งตัว
- $X \subseteq A \cap B$ ก็ต่อเมื่อ X เป็นสับเซตของทั้ง A และ B
- เพาเวอร์เซตของยูเนียนอาจมีสับเซตที่รวมสมาชิกจากทั้งสองเซต

ตัวอย่าง 17 ให้ $A = \{u\}$ และ $B = \{v\}$ เมื่อ $u \neq v$ จงแสดงว่า $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ไม่เท่ากับ $\mathcal{P}(A \cup B)$

วิธีคิด เซต $\{u, v\}$ เป็นสับเซตของ $A \cup B$ จึงอยู่ในเพาเวอร์เซตด้านขวา แต่ไม่เป็นสับเซตของ A หรือ B แยกกัน จึงไม่อยู่ด้านซ้าย

ตอบ ไม่เท่ากันในกรณีนี้

สรุป

การจัดรูปนิพจน์เซตใช้สมบัติของการดำเนินการภายในเอกภพเดียวกัน การพิสูจน์ต้องครอบคลุมสมาชิกทั่วไป ส่วนการหักล้างข้อความใช้ตัวอย่างโต้แย้งที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

เรื่อง เซต

แบบฝึกหัดตอนที่ 3

ง่าย

ข้อ 35 ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ จงหา $A \cup B$ และ $A \cap B$

ตอบ

ข้อ 36 ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ จงหา $A - B$ และ A'

ตอบ