



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

www.mathstandard.com

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง ลำดับและอนุกรม ครอบคลุมพจน์ทั่วไป ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต ลำดับเวียนเกิด สัญกรณ์ซิกมา ผลบวกจำกัด ลิมิต และอนุกรมอนันต์

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ การจัดรูปพีชคณิต สมการ อสมการ เลขยกกำลัง ลอการิทึม และฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}$ และ $\mathbb{R}$ แทนเซตจำนวนนับ จำนวนเต็ม และจำนวนจริง ตามลำดับ
- a_n แทนพจน์ที่ n ส่วน $S_n = a_1 + \dots + a_n$ แทนผลบวก n พจน์แรก ทั้งสองมีความหมายต่างกัน
- a_1 เป็นพจน์แรก d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต และ r เป็นอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต เว้นแต่ระบุความหมายเฉพาะในข้อนั้น
- ดัชนีในซิกมานับรวมขอบเขตทั้งสองปลาย ดัชนีเริ่มที่ศูนย์มีจำนวนพจน์ต่างจากดัชนีเริ่มที่หนึ่ง
- คำว่า “ลู่เข้า” หมายถึงลู่เข้าสู่จำนวนจริงที่จำกัด ลำดับที่โตสู่อันันต์หรือสั่นโดยไม่เข้าใกล้ค่าเดียวจัดเป็นลำดับลู่ออก
- ผลบวกอนันต์หมายถึงลิมิตของผลบวกย่อย ต้องตรวจการลู่เข้าก่อนใช้สมบัติของผลบวก
- มุมใช้หน่วยเรเดียนเมื่อไม่กำกับองศา แบบจำลองการเงินกำหนดอัตราดอกเบี้ยและช่วงเวลาตรงกัน และสมมติไม่มีค่าธรรมเนียมหรือภาษี

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 ลำดับและพจน์ทั่วไป	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–20	9
ตอนที่ 2 ซิกมาและอนุกรมจำกัด	
เนื้อหาและตัวอย่าง	19
แบบฝึกหัดข้อ 21–40	23
ตอนที่ 3 ลิมิตของลำดับ	
เนื้อหาและตัวอย่าง	33
แบบฝึกหัดข้อ 41–60	39

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

สารบัญ (ต่อ)**ตอนที่ 4 อนุกรมอนันต์และการหักล้าง**

เนื้อหาและตัวอย่าง	49
แบบฝึกหัดข้อ 61–80	55

ตอนที่ 5 อนุกรมกับฟังก์ชันและโครงสร้างพีชคณิต

เนื้อหาและตัวอย่าง	65
แบบฝึกหัดข้อ 81–100	70

ตอนที่ 6 การประยุกต์และแนวข้อสอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	80
แบบฝึกหัดข้อ 101–120	87
สรุปเนื้อหา เรื่อง ลำดับและอนุกรม	97
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	102
เฉลยเฉพาะคำตอบ	114
เฉลยวิธีคิด	121

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

ตอนที่ 1 ลำดับและพจน์ทั่วไป

เป้าหมาย ระบุพจน์และดัชนี ใช้สมบัติของลำดับเลขคณิตและเรขาคณิต และหาพจน์จากเงื่อนไขเวียนเกิด

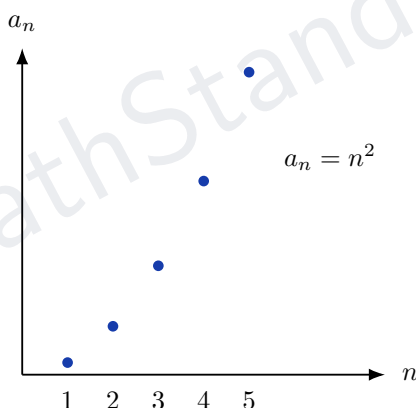
1.1 ความหมายของลำดับ

ลำดับของจำนวนจริงเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, \dots, N\}$ สำหรับลำดับจำกัด หรือ $N = \{1, 2, \dots\}$ สำหรับลำดับอนันต์ โดย a_n เป็นค่าของฟังก์ชันที่ดัชนี n กราฟเป็นจุดที่ดัชนีจำนวนเต็มบวก ไม่ลากเส้นเชื่อมเป็นกราฟต่อเนื่อง

หลักการและสูตร

$$a_n = f(n), \quad a_{n+1} = f(n+1), \quad a_{2n} = f(2n)$$

พจน์เริ่มต้นจำนวนจำกัดอาจสอดคล้องกับกฎได้หลายแบบ การหาพจน์ทั่วไปจึงต้องอาศัยเงื่อนไขที่กำหนด



ตัวอย่าง 1 ให้ $a_n = n^2 + 2n$ จงหา a_3 และ $a_{n+1} - a_n$

วิธีคิด แทนดัชนีได้ $a_3 = 3^2 + 2(3) = 15$ และ

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + 2(n+1) - (n^2 + 2n) = 2n + 3$$

ตอบ 15 และ $2n + 3$

1.2 ลำดับเลขคณิตและผลต่างร่วม

ลำดับเลขคณิตมีผลต่างระหว่างพจน์ที่ติดกันคงที่ ให้ d เป็นผลต่างร่วม และ a_1 เป็นพจน์แรก

หลักการและสูตร

$$d = a_{n+1} - a_n, \quad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_q - a_p = (q - p)d \quad (p \neq q)$$

$d > 0$ ลำดับเพิ่ม $d < 0$ ลำดับลด และ $d = 0$ ลำดับคงที่

$$\begin{array}{ccccccc} & +d & & +d & & +d & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ a_1 & & a_1 + d & & a_1 + 2d & & a_1 + 3d \end{array}$$

ตัวอย่าง 2 ลำดับเลขคณิตมี $a_4 = 11$ และ $a_9 = 31$ จงหา a_1 และ a_{15}

วิธีคิด ผลต่างดัชนีเท่ากับ 5 จึง $5d = 31 - 11 = 20$ ได้ $d = 4$ แล้ว $a_1 = 11 - 3(4) = -1$ และ $a_{15} = -1 + 14(4) = 55$

ตอบ $a_1 = -1, a_{15} = 55$

1.3 ตัวกลางเลขคณิตและเงื่อนไขดัชนี

แทรกจำนวน q จำนวนระหว่าง A กับ B ให้เป็นลำดับเลขคณิต จะมี $q + 2$ พจน์และ $q + 1$ ช่วงห่าง เมื่อต้องการดัชนีแรกที่ผ่านมาเงื่อนไข ให้แก้สมการแล้วเลือกจำนวนเต็มบวก พร้อมตรวจพจน์ข้างเคียง

หลักการและสูตร

$$d = \frac{B - A}{q + 1}, \quad \text{จำนวนที่แทรกลำดับที่ } j = A + jd \quad (1 \leq j \leq q)$$

แทรก 3 จำนวน มี 4 ช่วงห่าง

$$\begin{array}{ccccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ A & & A + d & & A + 2d & & A + 3d & & B \end{array}$$

ตัวอย่าง 3 ลำดับเลขคณิต 31, 26, 21, ... มีพจน์แรกที่เป็นลบเป็นพจน์ที่เท่าใด และมีค่าเท่าใด

วิธีคิด $a_n = 31 - 5(n - 1) = 36 - 5n$ เงื่อนไข $a_n < 0$ ให้ $n > \frac{36}{5}$ จึงเลือก $n = 8$ ตรวจได้ $a_7 = 1$ และ $a_8 = -4$

ตอบ พจน์ที่ 8 มีค่า -4

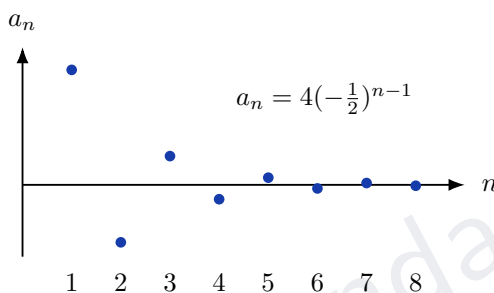
1.4 ลำดับเรขาคณิตและเครื่องหมาย

ลำดับเรขาคณิตเกิดจากคูณพจน์ก่อนหน้าด้วยค่าคงที่ r เรียกว่าอัตราส่วนร่วม หากพจน์ก่อนหน้าไม่เป็นศูนย์จึงเขียน $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ได้ นิยามแบบการคูณยังรองรับกรณี $r = 0$

หลักการและสูตร

$$a_{n+1} = ra_n, \quad a_n = a_1 r^{n-1}, \quad a_q = a_p r^{q-p}$$

สูตรพจน์ทั่วไปเริ่มที่ a_1 โดยกำลังศูนย์ในพจน์แรกมีค่า 1 ถ้า $a_1 \neq 0, r < 0$ พจน์สลับเครื่องหมาย และสมการ $r^{2k} = c$ อาจให้ทั้งรากบวกและลบ



ตัวอย่าง 4 ลำดับเรขาคณิตมี $a_2 = 12, a_4 = 48$ และอัตราส่วนร่วมเป็นลบ จงหา a_3

วิธีคิด $a_4 = a_2 r^2$ ให้ $r^2 = 4$ จึงมี $r = 2$ หรือ -2 เลือก $r = -2$ ตามเงื่อนไข แล้ว $a_3 = 12(-2) = -24$

ตอบ -24

1.5 ตัวกลางและความสัมพันธ์สามพจน์

ถ้า a, b, c เป็นสามพจน์ติดกันของลำดับเรขาคณิต จะมี $b^2 = ac$ และ $abc = b^3$ สำหรับตัวกลางบวกระหว่างจำนวนบวกให้เลือก $r > 0$ กรณีมีศูนย์ต้องตรวณิยามการคูณด้วย r เดียวกัน ไม่ใช่เพียง $b^2 = ac$

หลักการและสูตร

$$B = Ar^{q+1}, \quad r = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{q+1}} \quad (A, B > 0, r > 0)$$

$$a, b, c \text{ เป็นเรขาคณิต} \implies b^2 = ac$$

ตัวอย่าง 5 แทรกจำนวนบวกสองจำนวนระหว่าง 5 กับ 135 ให้เป็นลำดับเรขาคณิต จงหาจำนวนที่แทรก

วิธีคิด มีสามช่วงห่าง จึง $135 = 5r^3$ ได้ $r^3 = 27$ และ $r = 3$ จำนวนที่แทรกคือ $5(3) = 15$ และ $5(3)^2 = 45$

ตอบ $15, 45$

1.6 เจื่อนไขผลบวกและผลคูณ

สาม พจน์ เลขคณิต เขียน โดยใช้ พจน์ กลาง b เป็น $b - d, b, b + d$ ส่วน สี่ พจน์ อาจ เขียน เป็น $b - 3t, b - t, b + t, b + 3t$ ซึ่งมีผลต่างร่วม $2t$ ต้องแยกพารามิเตอร์ t ออกจากผลต่างร่วมจริง

หลักการและสูตร

$$(b - d) + b + (b + d) = 3b$$

$$(b - d)b(b + d) = b(b^2 - d^2)$$

เมื่อเลื่อนสามจำนวน A, B, C ด้วยค่าเดียวกัน t ให้เป็นเรขาคณิต ใช้ $(B + t)^2 = (A + t)(C + t)$ แล้วตรวจนิยามอีกครั้ง

ตัวอย่าง 6 สามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตมีผลบวก 24 และผลคูณ 440 จงหา d^2 เมื่อ d เป็นผลต่างร่วม
วิธีคิด พจน์กลางเป็น $\frac{24}{3} = 8$ จึงได้ $8(64 - d^2) = 440$ หารด้วย 8 แล้วจัดรูปให้ $d^2 = 64 - 55 = 9$

ตอบ 9

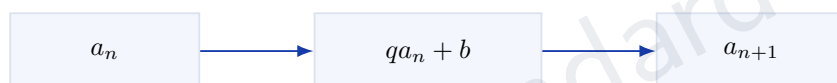
1.7 ลำดับเวียนเกิดและการย้อนกลับ

ลำดับเวียนเกิดกำหนดพจน์ด้วยค่าก่อนหน้า ต้องมีค่าตั้งต้นเพียงพอ ถ้า $a_{n+1} = qa_n + b$ และ $q \neq 0$ สามารถจัดรูปเพื่อคำนวณย้อนกลับได้ สำหรับ $q \neq 1$ การเลื่อนด้วยจุดตรึงช่วยเปลี่ยนเป็นเรขาคณิต

หลักการและสูตร

$$a_n = \frac{a_{n+1} - b}{q} \quad (q \neq 0)$$

$$c = \frac{b}{1 - q}, \quad a_{n+1} - c = q(a_n - c), \quad a_n = c + (a_1 - c)q^{n-1}$$



ย้อนกลับด้วย $\frac{a_{n+1} - b}{q}$ เมื่อ $q \neq 0$

ตัวอย่าง 7 ให้ $a_{n+1} = 2a_n + 3$ และ $a_4 = 37$ จงหา a_2 และ a_5

วิธีคิด ย้อนกลับได้ $a_3 = \frac{37 - 3}{2} = 17$ และ $a_2 = \frac{17 - 3}{2} = 7$ ส่วนเดินหน้าได้ $a_5 = 2(37) + 3 = 77$

ตอบ $a_2 = 7, a_5 = 77$

1.8 ผลต่างต่อเนื่องและการแยกดัชนี

ถ้าผลต่างชั้นที่สองคงที่ อาจสร้างพจน์ทั่วไปเป็นพหุนามดีกรีสองได้ ส่วนกฎที่เชื่อม a_{n+2} กับ a_n ให้แยกดัชนีคือและคู่ แล้วใช้ค่าตั้งต้นของแต่ละกลุ่ม

หลักการและสูตร

$$a_n = An^2 + Bn + C \implies a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2A$$

$$a_{n+2} = ra_n \implies a_{2j-1} = a_1 r^{j-1}, \quad a_{2j} = a_2 r^{j-1}$$

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_5 \xrightarrow{\times r} a_7$$

$$a_2 \xrightarrow{\times r} a_4 \xrightarrow{\times r} a_6 \xrightarrow{\times r} a_8$$

ตัวอย่าง 8 ให้ $a_1 = 2, a_2 = 5$ และ $a_{n+2} = 3a_n$ จงหา a_7 และ a_8

วิธีคิด ดัชนีคือและคู่เพิ่มจากค่าตั้งต้นกลุ่มละสามช่วง จึง $a_7 = a_1 3^3 = 54$ และ $a_8 = a_2 3^3 = 135$

ตอบ 54, 135

สรุป

แยกดัชนีออกจากค่าของพจน์ ตรวจสอบผลต่างหรืออัตราส่วนก่อนใช้สูตร การแทรกจำนวนต้องนับช่วงห่างและกฎเวียนเกิดต้องมีค่าตั้งต้นของทุกกลุ่มดัชนี

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 ให้ $a_n = 2n^2 - 1$ จงหา a_4 และ a_{n+1}

ตอบ

ข้อ 2 ลำดับเลขคณิต $-2, -5, -8, \dots$ มี a_{12} เท่าใด

ตอบ

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

ตอนที่ 3 ลิมิตของลำดับ

เป้าหมาย แยกการลู่เข้าออกจากการลู่ออก เลือกวิธีจัดรูปลิมิต และตรวจการลู่เข้าก่อนใช้สมการจุดตรึง

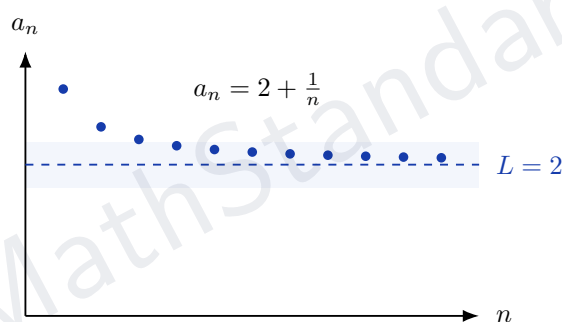
3.1 การลู่เข้าและลู่ออก

ลำดับลู่เข้าสู่จำนวนจริง L เมื่อพจน์เข้าใกล้ L ได้ตามต้องการเมื่อดัชนีมากพอ โดยไม่จำเป็นต้องมีพจน์ใดเท่ากับ L ลำดับที่โตไม่จำกัดหรือสั่นโดยไม่เข้าใกล้ค่าเดียวเป็นลำดับลู่ออก

หลักการและสูตร

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

สัญลักษณ์ ∞ มีใช้จำนวนจริงที่นำไปแทนในนิพจน์ ลิมิตเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ แสดงการลู่ออกในความหมายของการลู่เข้าสู่จำนวนจริง



ตัวอย่าง 16 จงหาลิมิตของ $a_n = 4 + \frac{3}{n}$ และพิจารณาว่ามีพจน์ใดเท่ากับลิมิตหรือไม่

วิธีคิด $\frac{3}{n} \rightarrow 0$ จึง $a_n \rightarrow 4$ แต่ $\frac{3}{n} > 0$ ทุกดัชนี ดังนั้นทุกพจน์มากกว่า 4 และไม่มีพจน์ใดเท่ากับลิมิต

ตอบ ลิมิต 4 และไม่มีพจน์ใดเท่ากับ 4

3.2 สมบัติลิมิตและอัตราส่วนพหุนาม

ถ้า $a_n \rightarrow A$ และ $b_n \rightarrow B$ สามารถหาลิมิตของผลบวก ผลต่าง และผลคูณแยกกันได้ สำหรับผลหารต้องมี $B \neq 0$ อัตราส่วนพหุนามจัดรูปโดยหารด้วยกำลังสูงสุดที่จำเป็น

หลักการและสูตร

$$\begin{aligned} \lim(a_n \pm b_n) &= A \pm B, & \lim a_n b_n &= AB \\ \lim \frac{a_n}{b_n} &= \frac{A}{B} \quad (B \neq 0), & \lim \frac{1}{n^p} &= 0 \quad (p > 0) \end{aligned}$$

ดีกรีเศษน้อยกว่าส่วนให้ลิมิต 0 ดีกรีเท่ากันให้ผลหารสัมประสิทธิ์นำ ส่วนดีกรีเศษมากกว่าต้องตรวจเครื่องหมายของพจน์นำ

ตัวอย่าง 17 จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 7}$

วิธีคิด หารเศษและส่วนด้วย n^2

$$\frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}} \rightarrow \frac{5}{2}$$

ลิมิตของตัวส่วนเป็น $2 \neq 0$ จึงใช้สมบัติผลหารได้

ตอบ $\frac{5}{2}$

3.3 ผลต่างกรณฑ์และสังยุค

ผลต่างกรณฑ์ที่แต่ละส่วนเพิ่มไม่จำกัดไม่สามารถแยกลิมิตเป็นผลต่างของอนันต์ ให้คูณสังยุคก่อน โดย $\sqrt{n^2} = n$ เพราะดัชนีเป็นบวก

หลักการและสูตร

$$\sqrt{A_n} - \sqrt{B_n} = \frac{A_n - B_n}{\sqrt{A_n} + \sqrt{B_n}}$$

สูตรใช้เมื่อกรณฑ์นิยามและตัวส่วนใหม่ไม่เป็นศูนย์ การถอด $\sqrt{x^2}$ สำหรับตัวแปรจริงทั่วไปต้องใช้ $|x|$

ตัวอย่าง 18 จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 12n + 1} - 2n)$

วิธีคิด คูณสังยุคได้

$$\frac{12n + 1}{\sqrt{4n^2 + 12n + 1} + 2n} = \frac{12 + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{12}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2} \rightarrow 3$$

ตอบ 3

3.4 เลขยกกำลังและแฟกทอเรียล

เมื่อ $|r| < 1$ กำลัง r^n เข้าใกล้ศูนย์ อัตราส่วนของกำลังต่างฐานจึงหารด้วยฐานที่โตเร็วกว่าได้ ส่วนแฟกทอเรียลให้ตัดพจน์รวมก่อน โดย $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ และ $0! = 1$

หลักการและสูตร

$$|r| < 1 \implies r^n \rightarrow 0$$

$$\frac{(n+s)!}{n!} = (n+1)(n+2) \cdots (n+s) \quad (s \in \mathbb{N})$$

ตัวอย่าง 19 จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n + 5 \cdot 6^n}{6^n + 4}$

วิธีคิด หารด้วย 6^n ได้

$$\frac{2(\frac{1}{2})^n + 5}{1 + 4(\frac{1}{6})^n} \rightarrow 5$$

เพราะทั้ง $(\frac{1}{2})^n$ และ $(\frac{1}{6})^n$ เข้าใกล้ศูนย์

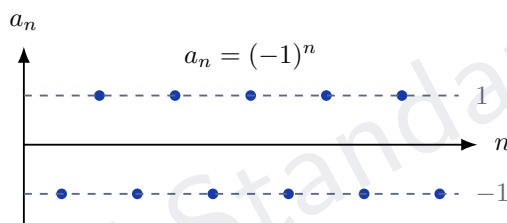
ตอบ 5

3.5 ลำดับย่อยและการลู่เข้า

ถ้าลำดับลู่เข้าสู่ L ลำดับย่อยทุกชุดต้องลู่เข้าสู่ L เช่นกัน จึงใช้ลำดับย่อยคู่และคี่หากล้างการลู่เข้าได้ ในทางกลับกัน ถ้าทั้งชุดคู่และชุดคี่ลู่เข้าสู่ค่าเดียวกัน ลำดับทั้งหมดลู่เข้าสู่ค่านั้น

หลักการและสูตร

$$\lim a_{2n} \neq \lim a_{2n-1} \implies (a_n) \text{ ไม่ลู่เข้า}$$



ตัวอย่าง 20 ให้ $a_n = 2 + 3(-1)^n + \frac{1}{n}$ จงพิจารณาการลู่เข้า

วิธีคิด ดัชนีคู่มี $(-1)^{2n} = 1$ จึง $a_{2n} \rightarrow 5$ ดัชนีคี่มี $(-1)^{2n-1} = -1$ จึง $a_{2n-1} \rightarrow -1$ ลิมิตย่อยต่างกัน

ตอบ ลู่ออก เพราะลิมิตย่อยเป็น 5 และ -1

3.6 ลิมิตที่มีซิกมาและกำลังนำ

แทนผลบวกด้วยสูตรอนุกรมจำกัดก่อนเปรียบเทียบกับกำลังของ n ถ้าต้องเลือกระดับกำลังของตัวหารให้ลิมิตบวกและจำกัด ต้องเท่ากับดีกรีจริงของตัวเศษหลังหักล้าง

หลักการและสูตร

$$\sum_{j=1}^n j \sim \frac{n^2}{2}, \quad \sum_{j=1}^n j^2 \sim \frac{n^3}{3}, \quad \sum_{j=1}^n j^3 \sim \frac{n^4}{4}$$

สัญลักษณ์ $u_n \sim v_n$ หมายถึง $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ ใช้เมื่อส่วนไม่เป็นศูนย์เมื่อดัชนีมากพอ

ตัวอย่าง 21 ให้ $k \in \mathbb{Z}$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \sum_{j=1}^n j^2 + 5}{n^k} = L > 0$ โดย L จำกัด จงหา k, L

วิธีคิด ตัวเศษเป็น $n(n+1)(2n+1) + 5 = 2n^3 + 3n^2 + n + 5$ จึงต้องเลือก $k = 3$ และได้ $L = 2$

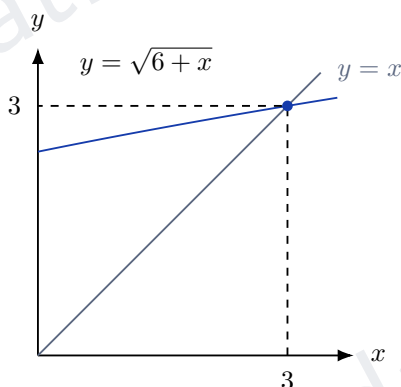
ตอบ $k = 3, L = 2$

3.7 ลำดับเวียนเกิดและการลู่เข้า

ลำดับเพิ่มที่มีขอบเขตบน หรือลำดับลดที่มีขอบเขตล่าง ย่อมลู่เข้า ถ้า $a_{n+1} = f(a_n)$ และ f ต่อเนื่องที่ลิมิต L จึงใช้ $L = f(L)$ ได้ สมการจุดตรึงเพียงอย่างเดียวไม่ยืนยันว่าลำดับลู่เข้า

หลักการและสูตร

$$a_n \rightarrow L, \quad f \text{ ต่อเนื่องที่ } L \implies L = f(L)$$



ตัวอย่าง 22 ให้ $a_1 = 1$ และ $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ จงหาลิมิต

วิธีคิด เริ่มที่ $1 \leq a_1 < 3$ ถ้า $1 \leq a_n < 3$ จะได้ $1 < a_{n+1} < 3$ และ

$$a_{n+1} \geq a_n \iff 6 + a_n \geq a_n^2 \iff (3 - a_n)(a_n + 2) \geq 0$$

จึงเป็นลำดับเพิ่มมีขอบเขตบน ลู่เข้าสู่ $L \geq 1$ แก้ $L^2 - L - 6 = 0$ ได้ $L = 3$ หรือ -2 เลือก 3

ตอบ 3

3.8 ลิมิตร่วมกับเมทริกซ์และจำนวนเชิงซ้อน

ใช้ความรู้ของโครงสร้างเดิมลดนิพจน์ให้เป็นจำนวนจริงก่อนหาลิมิต เช่น ดีเทอร์มิแนนต์ขนาดสองใช้ผลคูณทแยงหลักลบผลคูณอีกแนว และ $z\bar{z}$ เป็นขนาดกำลังสอง

หลักการและสูตร

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad z = u + vi \implies z\bar{z} = u^2 + v^2$$

ตัวอย่าง 23 ให้ $M_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & 3n \\ -\frac{1}{n} & n+4 \end{pmatrix}$ จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \det M_n$

วิธีคิด คำนวณดีเทอร์มิแนนต์ก่อน

$$\det M_n = \frac{2}{n}(n+4) - (3n)\left(-\frac{1}{n}\right) = 5 + \frac{8}{n}$$

จึงมีลิมิต 5

ตอบ 5

สรุป

จัดรูปก่อนหาลิมิต ตรวจสอบลิมิตของตัวส่วน ใช้ดัชนีคู่ที่ตรวจการสั้น และพิสูจน์การลู่เข้าหรือใช้สมมติฐานการลู่เข้าก่อนแทนค่าในสมการเวียนเกิด

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

แบบฝึกหัดตอนที่ 3

ง่าย

ข้อ 41 จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} (7 - \frac{4}{n})$

ตอบ

ข้อ 42 จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{5n - 2}$

ตอบ