



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

www.mathstandard.com

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ครอบคลุมคู่อันดับ ผลคูณคาร์ทีเซียน โดเมน เรนจ์ สมบัติและกราฟของฟังก์ชัน พีชคณิตของฟังก์ชัน ฟังก์ชันประกอบ ฟังก์ชันผกผัน และการประยุกต์ ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ เซต จำนวนสมาชิก จำนวนจริง อสมการ การแยกตัวประกอบ และสมการกำลังสอง

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- หากไม่กำหนดเป็นอย่างอื่น ตัวแปรของสูตรฟังก์ชันเป็นจำนวนจริง และใช้โดเมนที่กว้างที่สุดซึ่งทำให้สูตรนิยามได้
- D_r, R_r แทนโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r ส่วน $f : A \rightarrow B$ มีโดเมน A และเซตปลายทาง B โดย $R_f \subseteq B$
- $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A และ $\mathcal{P}(A)$ แทนเพาเวอร์เซต
- fg แทนผลคูณของฟังก์ชัน ส่วน $f \circ g$ แทนฟังก์ชันประกอบ โดยใช้ g ก่อน f
- f^{-1} แทนความสัมพันธ์ผกผันหรือฟังก์ชันผกผันตามบริบท มิใช่ $\frac{1}{f}$ ส่วนภาพย้อนกลับของเซตจะระบุเป็นเซตของอินพุตให้ชัดเจน
- จุดที่บวมอยู่ในกราฟ จุดโปร่งไม่รวม เส้นประใช้เป็นเส้นช่วยหรือเส้นขอบที่ไม่รวมตามคำอธิบายของแต่ละรูป
- ข้อที่ต้องการสูตรต้องระบุโดเมนและเงื่อนไขที่เกี่ยวข้อง คำตอบของปริมาณระบุหน่วย และเศษส่วนเขียนอย่างต่ำ

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 ความสัมพันธ์และผลคูณคาร์ทีเซียน	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–14	8
ตอนที่ 2 โดเมนและเรนจ์	
เนื้อหาและตัวอย่าง	17
แบบฝึกหัดข้อ 15–28	22
ตอนที่ 3 นิยามและชนิดของฟังก์ชัน	
เนื้อหาและตัวอย่าง	31
แบบฝึกหัดข้อ 29–42	36
ตอนที่ 4 กราฟและการแปลงกราฟ	
เนื้อหาและตัวอย่าง	45
แบบฝึกหัดข้อ 43–56	52
ตอนที่ 5 พหุนามของฟังก์ชัน	
เนื้อหาและตัวอย่าง	62
แบบฝึกหัดข้อ 57–70	66

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 6 ฟังก์ชันประกอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	75
แบบฝึกหัดข้อ 71–84	78

ตอนที่ 7 ฟังก์ชันผกผันและภาพย้อนกลับ

เนื้อหาและตัวอย่าง	87
แบบฝึกหัดข้อ 85–98	93

ตอนที่ 8 การประยุกต์และโจทย์แนวข้อสอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	102
แบบฝึกหัดข้อ 99–112	108

ตอนที่ 9 การเชื่อมโยงลอการิทึมและแคลคูลัส

เนื้อหาและตัวอย่าง	117
แบบฝึกหัดข้อ 113–126	120
สรุปเนื้อหา เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	129
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	137
เฉลยเฉพาะคำตอบ	149
เฉลยวิธีคิด	157

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ตอนที่ 1 ความสัมพันธ์และผลคูณคาร์ทีเซียน

เป้าหมาย ใช้คู่อันดับ ผลคูณคาร์ทีเซียน และนิยามความสัมพันธ์ เพื่อแจกแจงและนับอย่างมีเงื่อนไข

1.1 คู่อันดับและการเท่ากัน

คู่อันดับ (a, b) ระบุสมาชิกตัวหน้า a และสมาชิกตัวหลัง b ลำดับมีความสำคัญ

เทียบสมาชิกตำแหน่งเดียวกัน

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ และ } b = d$$

- โดยทั่วไป (a, b) กับ (b, a) เป็นคนละคู่ ยกเว้นเมื่อ $a = b$
- การไม่เท่ากันหมายถึงต่างกันอย่างน้อยหนึ่งตำแหน่ง มิใช่ต้องต่างกันทั้งสองตำแหน่ง

ตัวอย่าง 1 ถ้า $(3x - 2, 2y + 1) = (10, -5)$ และ $(y, 4) = (-p, 4)$ จงหา p, xy

วิธีคิด เทียบตำแหน่งได้ $3x - 2 = 10$ และ $2y + 1 = -5$ จึงมี $x = 4, y = -3$ อีกคู่ให้ $y = -p$ จึงได้ $p = 3$ และ $xy = -12$

ตอบ $p = 3, xy = -12$

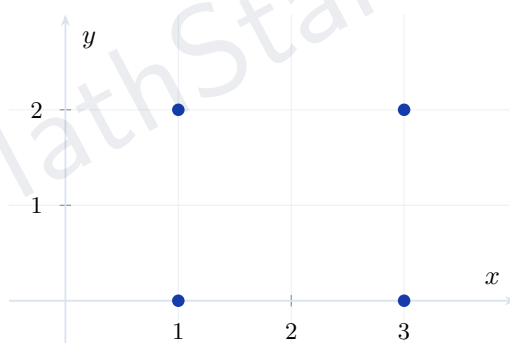
1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ A, B เป็นเซต ผลคูณคาร์ทีเซียนรวบรวมทุกคู่ที่ตัวหน้ามาจาก A และตัวหลังมาจาก B

นิยามและจำนวนสมาชิก

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

ถ้า A, B เป็นเซตจำกัด จะมี $n(A \times B) = n(A)n(B)$



- $A \times B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่ออย่างน้อยหนึ่งเซตเป็นเซตว่าง
- การเขียน $A \times B$ เป็นเซตของคู่อันดับ มิใช่เซตที่นำสมาชิกรวมกัน

ตัวอย่าง 2 ให้ $A = \{1, 3\}, B = \{0, 2\}$ จงแจกแจง $A \times B$ และ $B \times A$

วิธีคิด เลือกตัวหน้าในเซตแรกแล้วจับคู่กับตัวหลังทุกตัวในเซตที่สอง แต่ละผลคูณมี $2(2) = 4$ คู่

ตอบ $A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (3, 0), (3, 2)\}$ และ $B \times A = \{(0, 1), (0, 3), (2, 1), (2, 3)\}$

1.3 สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ A, B, C, D เป็นเซต การตรวจสอบสมาชิกทำแยกตามตำแหน่งทั้งสอง

แจกแจงและหาส่วนร่วม

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$$

- เมื่อเซตจำกัด ส่วนร่วมในบรรทัดสุดท้ายมีสมาชิก $[n(A \cap B)]^2$ คู่
- ถ้า $A \neq \emptyset$ และ $A \times B = A \times C$ จึงสรุปได้ว่า $B = C$

ตัวอย่าง 3 ให้ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ จงหา $n((A \times B) \cup (B \times A))$

วิธีคิด ทั้งสองผลคูณมีอย่างละ 12 คู่ ส่วนร่วมคือ $\{2, 3\} \times \{2, 3\}$ มี 4 คู่ ใช้หลักบวกลบรวมได้

$$12 + 12 - 4 = 20$$

ตอบ 20

1.4 ความสัมพันธ์และจำนวนความสัมพันธ์

ให้ A, B เป็นเซต ความสัมพันธ์ r จาก A ไป B เป็นสับเซตหนึ่งของผลคูณคาร์ทีเซียน

ความสัมพันธ์เป็นเซตคู่อันดับ

$$r \subseteq A \times B$$

เมื่อ $n(A) = m, n(B) = n$ จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดคือ 2^{mn}

- เซตว่างและ $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เสมอ
- $n(r)$ นับคู่อันดับในความสัมพันธ์ที่กำหนด ส่วน 2^{mn} นับจำนวนความสัมพันธ์ที่เลือกได้ทั้งหมด

ตัวอย่าง 4 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$ จงหา r และจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก A ไป B

วิธีคิด ตรวจสอบคู่ตามตัวหน้าได้ $x = 1$ ไม่มีคู่ $x = 2$ ให้ $(2, 1)$ และ $x = 3$ ให้ $(3, 1), (3, 2)$ ส่วนจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดใช้ $2^{3 \cdot 2}$

ตอบ $r = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ และมีทั้งหมด 64 ความสัมพันธ์

1.5 ความสัมพันธ์ที่กำหนดด้วยสมการและเงื่อนไข

คู่อันดับต้องอยู่ในผลคูณที่กำหนด และผ่านเงื่อนไขของความสัมพันธ์พร้อมกัน

การหาจุดร่วม

$$(x, y) \in r \cap s \iff (x, y) \in r \text{ และ } (x, y) \in s$$

- แก่ระบบสมการแล้วตรวจสอบว่าพิกัดอยู่ในเซตที่กำหนด เช่น $\mathbb{Z}^2$ หรือ $\mathbb{R}^2$
- เงื่อนไข “หรือ” เลือกคู่ที่ผ่านอย่างน้อยหนึ่งเงื่อนไข โดยไม่นับคู่ซ้ำ

ตัวอย่าง 5 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2x + y = 7\}$ และ $s = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y = 2\}$ จงหา $r \cap s$

วิธีคิด จากสมการที่สองมี $y = x - 2$ แทนในสมการแรกได้ $3x - 2 = 7$ จึงมี $x = 3, y = 1$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็มทั้งคู่

ตอบ $\{(3, 1)\}$

1.6 การนับคู่อันดับบนเซตจำกัด

แบ่งคู่อันดับตามสมาชิกตัวหน้า แต่ละกลุ่มไม่ซ้ำกัน แล้วรวมจำนวนสมาชิกของแต่ละกลุ่ม

หลักการบวกและการคูณ

$$n(r) = \sum_{a \in A} n(\{b \in B \mid (a, b) \in r\})$$

- ใช้หลักการคูณเมื่อจำนวนทางเลือกของสมาชิกตัวหลังเท่ากันทุกกรณี
- ถ้ามีหลายเงื่อนไข ให้หาส่วนร่วมเพื่อตัดจำนวนคู่ที่นับซ้ำ

ตัวอย่าง 6 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \dots, 6\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y \geq x + 1\}$ จงหา $n(r)$

วิธีคิด เมื่อ $x = 1, 2, 3, 4$ จำนวนค่าของ y เท่ากับ 5, 4, 3, 2 ตามลำดับ รวม $5 + 4 + 3 + 2 = 14$

ตอบ 14

สรุป

คู่อันดับเทียบสมาชิกตามตำแหน่ง ผลคูณคาร์ทีเซียนกำหนดคู่ที่ยอมรับได้ ความสัมพันธ์เลือกบางคู่จากผลคูณนั้น การนับคู่อันดับกับการนับจำนวนความสัมพันธ์เป็นคนละปริมาณ

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 ถ้า $(2x + 1, 3y - 2) = (9, 10)$ จงหา x, y

ตอบ

ข้อ 2 ให้ $A = \{0, 2\}, B = \{1, 4\}$ จงแจกแจง $A \times B$

ตอบ

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ตอนที่ 3 นิยามและชนิดของฟังก์ชัน

เป้าหมาย จำแนกฟังก์ชัน หนึ่งต่อหนึ่ง ทัวถึง และนับฟังก์ชันบนเซตจำกัด

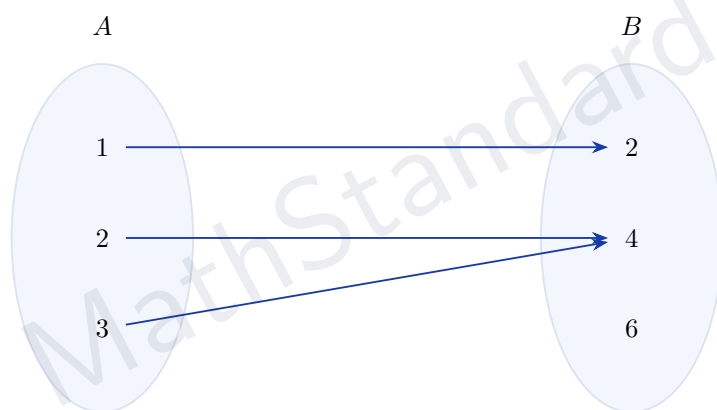
3.1 ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปอีกเซตหนึ่ง

ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ กำหนดผลลัพธ์ใน B เพียงหนึ่งค่าให้สมาชิกทุกตัวของ A

เงื่อนไขสองส่วน

$$D_f = A, \quad R_f \subseteq B$$

$$(x, y) \in f, (x, z) \in f \implies y = z$$



$$R_f = \{2, 4\} \subsetneq B$$

- สมาชิกตัวหลังซ้ำกันได้ แต่สมาชิกตัวหน้าเดียวกันห้ามมีผลลัพธ์ต่างกัน
- คู่อันดับเต็มที่ยื่นซ้ำยังเป็นสมาชิกตัวเดียวของเซต

ตัวอย่าง 13 ให้ $r = \{(1, 4), (2, 5), (1, 2t)\}$ จงหา t ที่ทำให้ r เป็นฟังก์ชัน

วิธีคิด ตัวหน้า 1 มีผลลัพธ์ 4 และ $2t$ จึงต้องมี $2t = 4$ แล้วคู่อันดับที่ซ้ำกันถือเป็นคู่เดียว

ตอบ $t = 2$

3.2 เซตปลายทางและเรนจ์

เซตปลายทาง B เป็นเซตที่ประกาศให้ผลลัพธ์อยู่ ส่วนเรนจ์ R_f เป็นผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจริง

เปรียบเทียบขอบเขตของข้อมูล

$$f : A \rightarrow B \implies D_f = A \text{ และ } R_f \subseteq B$$

- อย่างตั้ง $R_f = B$ โดยไม่มีเงื่อนไขทั่วถึง
- สูตรเดียวกันอาจมีสมบัติต่างกันเมื่อเปลี่ยนโดเมนหรือเซตปลายทาง

ตัวอย่าง 14 ให้ $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ โดย $f(x) = x^2$ จงหาโดเมน เรนจ์ และสมาชิกของเซตปลายทางที่ไม่ถูกใช้

วิธีคิด แทนอินพุตทั้งสามได้ค่า 1, 0, 1 จึงมีผลลัพธ์ที่แตกต่างกันเพียง 0, 1 สมาชิก 2 ไม่เป็นผลลัพธ์

ตอบ $D_f = \{-1, 0, 1\}$, $R_f = \{0, 1\}$ และสมาชิกที่ไม่ถูกใช้คือ 2

3.3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $f : A \rightarrow B$ ฟังก์ชันเป็นหนึ่งต่อหนึ่งเมื่ออินพุตต่างกันให้ผลลัพธ์ต่างกัน

นิยามที่ใช้พิสูจน์

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \quad (x_1, x_2 \in A)$$

- หักล้างได้ด้วยอินพุตต่างกันหนึ่งคู่ที่ให้ผลลัพธ์เท่ากัน
- ตรวจสอบโดเมนก่อนยกตัวอย่าง เช่น x^2 บน $[0, \infty)$ ต่างจากบน $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 15 จงแสดงว่า $f(x) = 3x - 4$ บน $\mathbb{R}$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีคิด ให้ $f(u) = f(v)$ จะได้ $3u - 4 = 3v - 4$ จึงมี $3(u - v) = 0$ และ $u = v$ สำหรับทุก $u, v \in \mathbb{R}$

ตอบ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

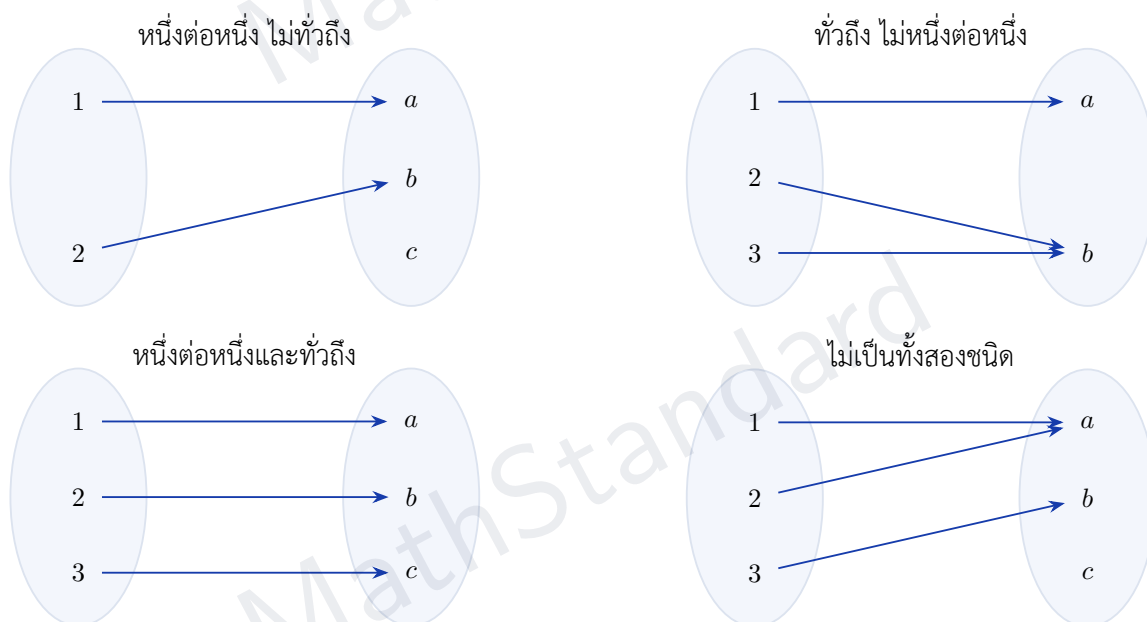
3.4 ฟังก์ชันทั่วถึงและฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

ให้ $f : A \rightarrow B$ ฟังก์ชันทั่วถึง B เมื่อสมาชิกทุกตัวของ B เป็นผลลัพธ์ของอินพุตอย่างน้อยหนึ่งตัว

ตรวจจากเรนจ์

$$f \text{ ทั่วถึง } B \iff R_f = B$$

หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง: สมาชิกทุกตัวของ B มีอินพุตที่ให้ค่ามันเพียงหนึ่งตัว



- ทั่วถึงขึ้นกับเซตปลายทางที่ประกาศไว้
- พิสูจน์โดยให้ $y \in B$ เป็นค่าใด ๆ แล้วแสดงว่ามี $x \in A$ ซึ่ง $f(x) = y$

ตัวอย่าง 16 พิจารณา $f : \mathbb{R} \rightarrow [2, \infty)$ โดย $f(x) = x^2 + 2$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งหรือทั่วถึงหรือไม่

วิธีคิด มี $f(1) = f(-1) = 3$ จึงไม่หนึ่งต่อหนึ่ง แต่ทุก $y \geq 2$ เลือก $x = \sqrt{y-2} \in \mathbb{R}$ ได้ จึงทั่วถึง

ตอบ ทั่วถึง แต่ไม่หนึ่งต่อหนึ่ง

3.5 การนับฟังก์ชันทั้งหมดและหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $n(A) = m, n(B) = n$ โดย m, n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนด $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ และ $0! = 1$

เลือกผลลัพธ์ให้สมาชิกทีละตัว

ฟังก์ชันทั้งหมด : n^m

หนึ่งต่อหนึ่ง ($m \leq n$) : $\frac{n!}{(n-m)!}$

หนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ($m = n$) : $n!$

ถ้า $m > n$ ไม่มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และถ้า $m < n$ ไม่มีฟังก์ชันทั่วถึง

- สัญลักษณ์จัดหมู่ $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ นับการเลือก m สมาชิกจาก n สมาชิกโดยไม่สนใจลำดับ เมื่อ $0 \leq m \leq n$
- การนับฟังก์ชันเป็นการนับรูปแบบการจับคู่ทั้งหมด มิใช่จำนวนคู่อันดับในฟังก์ชันหนึ่ง

ตัวอย่าง 17 เซต A มี 3 สมาชิก และ B มี 5 สมาชิก จงหาจำนวนฟังก์ชันทั้งหมดและจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

วิธีคิด แต่ละอินพุตเลือกได้ 5 ค่า จึงมี 5^3 ฟังก์ชัน หากหนึ่งต่อหนึ่งต้องเลือกไม่ซ้ำกัน มี $5 \cdot 4 \cdot 3$ แบบ

ตอบ 125 และ 60 แบบ ตามลำดับ

3.6 การใช้โดเมนครบและการนับฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $n(A) = m, n(B) = n$ เป็นจำนวนเต็มบวก การใช้โดเมนครบของความสัมพันธ์ยอมให้หนึ่งอินพุตจับคู่หลายผลลัพธ์

แยกการนับสองประเภท

ความสัมพันธ์ที่ $D_r = A$: $(2^n - 1)^m$

ฟังก์ชันทั่วถึง : $\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$

- สูตรแรกให้แต่ละอินพุตเลือกสับเซตไม่ว่างของ B
- สูตรทั่วถึงเริ่มจากทั้งหมด ลบกรณีที่ขาดผลลัพธ์หนึ่งตัว บวกคืนกรณีที่ขาดสองตัว แล้วสลับเครื่องหมายต่อไป
- กรณีเซตปลายทางสองตัว ใช้ $2^m - 2$ เพราะตัดฟังก์ชันค่าคงตัวสองแบบ

ตัวอย่าง 18 ให้ $n(A) = 3, n(B) = 2$ จงหาจำนวนความสัมพันธ์ที่ใช้โดเมน A ครบ และจำนวนฟังก์ชันทั่วถึงจาก A ไป B

วิธีคิด แต่ละอินพุตเลือกสับเซตไม่ว่างได้ 3 แบบ จึงมี $3^3 = 27$ ความสัมพันธ์ ส่วนทั่วถึงมี $2^3 - 2 = 6$ ฟังก์ชัน

ตอบ 27 ความสัมพันธ์ และ 6 ฟังก์ชัน

สรุป

ฟังก์ชันกำหนดผลลัพธ์เดียวให้อินพุตทุกตัว หนึ่งต่อหนึ่งห้ามผลลัพธ์ซ้ำจากอินพุตต่างกัน ทั่วถึงต้องใช้เซตปลายทางครบ การนับจึงต้องแยกความสัมพันธ์ ฟังก์ชันทั่วไป และเงื่อนไขแต่ละชนิด

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

แบบฝึกหัดตอนที่ 3

ง่าย

ข้อ 29 ให้ $r = \{(-1, 3), (2, 4), (-1, t + 1)\}$ จงหา t ที่ทำให้ r เป็นฟังก์ชัน

ตอบ

ข้อ 30 ให้ $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 4, 6, 8\}$ โดย $f(x) = 2x$ จงหาเรนจ์และสมาชิกปลายทางที่ไม่ถูกใช้

ตอบ