



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง ความน่าจะเป็น

www.mathstandard.com

เรื่อง ความน่าจะเป็น

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง ความน่าจะเป็น ครอบคลุมหลักการนับ การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ เทคนิคการแจกแจงสิ่งของ การนับฟังก์ชัน ทฤษฎีบททวินาม และการคำนวณความน่าจะเป็น

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ เซต จำนวนเต็ม สมการ ฟังก์ชัน และเลขยกกำลัง

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $n(A)$ คือจำนวนสมาชิกของเซต A และ $\varnothing$ คือเซตว่าง
- $n!$ คือแฟกทอเรียล โดย $0! = 1$ และ n เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ
- $P_{n,r}$ คือจำนวนการเรียงสิ่งของต่างกัน r ชิ้นจาก n ชิ้น ส่วน $\binom{n}{r}$ คือจำนวนการเลือกโดยไม่สนใจลำดับ
- S คือปริภูมิตัวอย่าง A, B, E คือเหตุการณ์ และ $P(E)$ คือความน่าจะเป็น ใช้ตัว P ใหญ่เอียงตามสัญลักษณ์คณิตศาสตร์
- $P(A)$ คือเพาเวอร์เซตของ A แยกจากความน่าจะเป็น $P(E)$
- $A \cup B$ หมายถึงเกิด A หรือ B อย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ $A \cap B$ หมายถึงเกิดทั้งสอง และ A' หมายถึงไม่เกิด A
- $P(B | A)$ คือความน่าจะเป็นของ B เมื่อทราบว่า A เกิด โดยต้องมี $P(A) > 0$
- สูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ ใช้เมื่อผลลัพธ์พื้นฐานมีโอกาสเท่ากันเท่านั้น การหยิบพร้อมกันและการหยิบตามลำดับต้องใช้แบบจำลองให้สอดคล้องทั้งตัวเศษและตัวส่วน
- หากไม่ได้ระบุเป็นอย่างอื่น สิ่งของหรือบุคคลที่ต่างกันถือว่าแยกแยะได้ และคำตอบความน่าจะเป็นแสดงเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ความเป็น

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 หลักการนับและการแยกกรณี	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–20	10
ตอนที่ 2 การจัดหมู่และการเรียงสับเปลี่ยน	
เนื้อหาและตัวอย่าง	20
แบบฝึกหัดข้อ 21–40	25
ตอนที่ 3 เทคนิคการนับและการประยุกต์	
เนื้อหาและตัวอย่าง	35
แบบฝึกหัดข้อ 41–60	40

เรื่อง ความสำเร็จเป็น

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 การนับฟังก์ชันและทฤษฎีบททวินาม

เนื้อหาและตัวอย่าง	50
แบบฝึกหัดข้อ 61–80	55

ตอนที่ 5 ปริภูมิตัวอย่างและความสำเร็จเป็นจากการนับ

เนื้อหาและตัวอย่าง	65
แบบฝึกหัดข้อ 81–100	71

ตอนที่ 6 สมบัติเหตุการณ์และการทดลองหลายชั้น

เนื้อหาและตัวอย่าง	81
แบบฝึกหัดข้อ 101–120	89
สรุปเนื้อหา เรื่อง ความสำเร็จเป็น	99
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	105
เฉลยเฉพาะคำตอบ	117
เฉลยวิธีคิด	124

เรื่อง ความเป็น

ตอนที่ 1 หลักการนับและการแยกกรณี

เป้าหมาย กำหนดผลลัพธ์ ใช้หลักบวกและคูณ และจัดการข้อจำกัดโดยไม่ตกหล่นหรือนับซ้ำ

1.1 ผลลัพธ์และขั้นตอนการนับ

ผลลัพธ์ที่ต่างกันต้องกำหนดจากกติกาของสถานการณ์ การเลือกสมาชิก การกำหนดตำแหน่ง และการเรียงลำดับอาจนับคนละสิ่ง แม้ใช้สมาชิกชุดเดียวกัน

สิ่งที่ต้องระบุก่อนนับ

- ลำดับมีผลหรือไม่ เช่น ประธานกับรองประธานต่างจากกรรมการสองคน
- ใช้สิ่งเดิมซ้ำได้หรือไม่ และสิ่งที่เหมือนกันแยกแยะด้วยหมายเลขหรือไม่
- ตำแหน่งมีชื่อกำกับหรือถือว่าการหมุนเป็นรูปแบบเดิม
- แต่ละผลลัพธ์ต้องถูกนับหนึ่งครั้ง และรวมครบทุกผลลัพธ์ที่ผ่านเงื่อนไข

ตัวอย่าง 1 ผู้แทน A, B, C เลือกสองคนเป็นกรรมการ กับเลือกเป็นประธานและรองประธาน ได้จำนวนต่างกันอย่างไร

วิธีคิด กรรมการไม่สนใจลำดับ มี AB, AC, BC สามชุด ส่วนตำแหน่งต่างกันทำให้แต่ละชุดสลับได้สองแบบ รวม $3 \cdot 2 = 6$ วิธี

ตอบ กรรมการ 3 ชุด ตำแหน่ง 6 วิธี

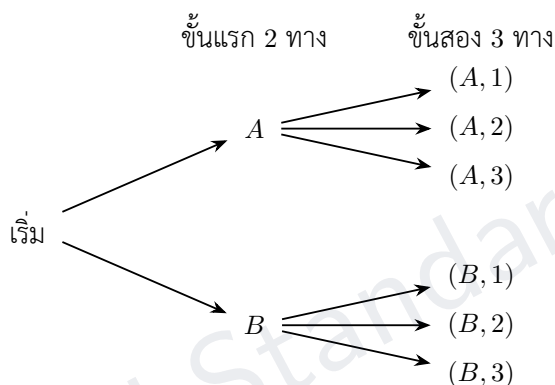
1.2 หลักการคูณและแผนภาพต้นไม้

งานต่อเนื่อง k ชั้น หากทุกทางเลือกก่อนหน้าทำให้ชั้นที่ i มีทางเลือก n_i แบบตามที่กำหนด จำนวนผลลัพธ์ได้จากการคูณจำนวนทางเลือก

หลักการคูณ

$$n_1 n_2 \cdots n_k$$

k คือจำนวนชั้น และ n_i คือจำนวนทางเลือกในชั้นที่ i หลังผ่านชั้นก่อนหน้า หากจำนวนทางเลือกต่างกันตามแขนง ต้องแยกกรณีก่อนคูณ



แต่ละแขนงแรกมีสามทางเลือก จึงได้ $2 \cdot 3 = 6$ ผลลัพธ์

การคูณจำนวนวิธีไม่จำเป็นต้องอาศัยความเป็นอิสระของการทดลองสุ่ม เพียงใช้จำนวนทางเลือกที่เหลือจริงในแต่ละชั้น

ตัวอย่าง 2 ร้านมีเครื่องดื่มสามชนิด แต่ละชนิดเลือกขนาดได้สองขนาดและความหวานสี่ระดับ จงนับรายการสิ่งหนึ่งแก้ว

วิธีคิด เลือกชนิด ขนาด และความหวานตามลำดับ ทุกชนิดมีจำนวนตัวเลือกเท่ากัน จึงได้ $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ รายการ

ตอบ 24 รายการ

1.3 หลักการบวกและกรณีที่ไม่ทับซ้อน

เมื่อแบ่งผลลัพธ์เป็น k กรณี ซึ่งไม่ทับกันและรวมครบทุกกรณี ให้นับภายในแต่ละกรณีแล้วบวก

หลักการบวก

$$n(E) = n(E_1) + \cdots + n(E_k), \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

E คือเหตุการณ์ที่ต้องการนับ และ $E_1, \dots, E_k$ คือส่วนย่อยที่แบ่งไว้ คำว่า “หรือ” อาจมีส่วนทับซ้อน จึงต้องตรวจสอบเงื่อนไขก่อนบวกโดยตรง

ตัวอย่าง 3 ช่วงแรกมีรถไฟสองทางและรถโดยสารสามทาง ช่วงสองมีรถไฟสี่ทางและรถโดยสารสองทาง ต้องใช้รถไฟเพียงหนึ่งช่วงได้กี่วิธี

วิธีคิด รถไฟแล้วรถโดยสารมี $2 \cdot 2 = 4$ วิธี รถโดยสารแล้วรถไฟมี $3 \cdot 4 = 12$ วิธี กรณีไม่ทับกันจึงรวม 16

ตอบ 16 วิธี

1.4 แฟกทอเรียลและการเลือกตามลำดับ

เมื่อเลือกของต่างกันโดยไม่ซ้ำ จำนวนทางเลือกจะลดลงทีละหนึ่ง แฟกทอเรียลเป็นสัญลักษณ์ย่อของ ผลคูณจำนวนเต็มบวกต่อเนื่อง

แฟกทอเรียลและการเรียงบางส่วน

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1) \cdots (n-r+1)$$

n, r เป็นจำนวนเต็ม โดย $0 \leq r \leq n$ และ $P_{n,0} = 1$ อัตราส่วนแฟกทอเรียลใช้ในการตัดตัวประกอบร่วม ก่อน

ตัวอย่าง 4 เลือกผู้รับรางวัลต่างกันสามรางวัลจากเจ็ดคน คนละไม่เกินหนึ่งรางวัล ได้กี่วิธี

วิธีคิด รางวัลมีชื่อจึงสนใจตำแหน่ง ผู้รับเลือกได้ 7, 6, 5 คนตามลำดับ ได้ $P_{7,3} = 210$

ตอบ 210 วิธี

1.5 การสร้างจำนวนและข้อจำกัดของหลัก

จำนวนหลายหลักห้ามหลักซ้ายสุดเป็นศูนย์ แต่รหัสอาจอนุญาตได้ ควรกำหนดหลักที่มีข้อจำกัดก่อน เช่น หลักหน่วยของจำนวนคู่ แล้วตรวจสอบจำนวนทางเลือกของหลักอื่น

แนวพิจารณาดำเนิน

- คู่มือหรือคู่มือที่หลักหน่วย หากด้วยห้าลงตัวตรวจสอบหน่วยเป็นศูนย์หรือห้า
- เลขไม่ซ้ำต้องตัดเลขที่ใช้แล้วออกจากทุกตำแหน่งที่เหลือ
- มากกว่าค่าที่กำหนดให้เทียบหลักซ้ายสุดที่ต่างกัน และแยกกรณีเท่าขอบเขต

หลักร้อย

หลักสิบ

หลักหน่วย

ห้ามเป็นศูนย์

กำหนดคู่มือหรือคู่มือ

ตัวอย่าง 5 ใช้เลข 0, 1, 2, 3, 4 สร้างจำนวนคู่สามหลักไม่ซ้ำเลข ได้กี่จำนวน

วิธีคิด หน่วยเป็นศูนย์ หลักร้อยเลือกสี่และหลักสิบสามค่า ได้ 12 จำนวน หน่วยเป็น 2, 4 หลักร้อยเลือกสามและหลักสิบสามค่า ได้ 18 จำนวน รวม 30

ตอบ 30 จำนวน

1.6 ส่วนเติมเต็มและหลักบวกลบรวม

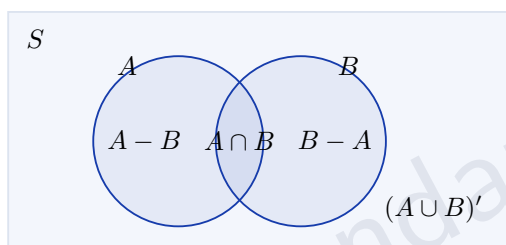
เมื่อเงื่อนไขตรงข้ามนับได้ง่ายกว่า ใช้จำนวนทั้งหมดลบจำนวนที่ไม่ต้องการ หลายเงื่อนไขต้องแก้การนับซ้ำในส่วนร่วม

ส่วนเติมเต็มและสองเซต

$$n(E) = n(S) - n(E')$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

S คือเซตผลลัพธ์ทั้งหมด และ E' คือส่วนเติมเต็มของ E ภายใน S ส่วนร่วมถูกนับสองครั้งในผลบวกจึงลบหนึ่งครั้ง



สี่บริเวณไม่ทับกันและรวมเป็นปริภูมิตัวอย่าง S

ตัวอย่าง 6 รหัสห้าตำแหน่งใช้ A หรือ B เข้าได้ ต้องมีทั้งสองตัว มีกี่รหัส

วิธีคิด ทั้งหมด $2^5 = 32$ รหัส รหัสใช้ชนิดเดียวคือ $AAAAA, BBBBB$ สองรหัส จึงเหลือ 30

ตอบ 30 รหัส

1.7 การนับสับเซตและตัวหาร

สับเซต เกิด จาก การ เลือก หรือ ไม่ เลือก สมาชิก แต่ละ ตัว ตัวหารบวก เกิด จาก การ เลือก เลขชี้กำลัง ของ จำนวนเฉพาะภายในขอบเขต

หลักการคูณในรูปแบบอื่น

เซต A มี n สมาชิก มีสับเซต 2^n เซต และสับเซตไม่ว่าง $2^n - 1$ เซต

$$N = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \implies d(N) = (a_1 + 1) \cdots (a_k + 1)$$

p_i เป็นจำนวนเฉพาะต่างกัน a_i เป็นจำนวนเต็มบวก และ $d(N)$ คือจำนวนตัวหารบวก เลขชี้กำลังของ ตัวหารแต่ละตัวเลือกได้จากศูนย์ถึง a_i

ตัวอย่าง 7 $N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ มีตัวหารบวกทั้งหมดกี่ตัว และที่เป็นพหุคูณของหกก็ตัว

วิธีคิด ทั้งหมด $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$ ตัว พหุคูณของหกต้องเลือกกำลังของสองจาก 1, 2, 3 ของสาม จาก 1, 2 และของห้าจาก 0, 1 จึงมี $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ ตัว

ตอบ ทั้งหมด 24 ตัว พหุคูณหก 12 ตัว

1.8 การนับหลายขั้นเมื่อเงื่อนไขเปลี่ยน

การย้ายสิ่งของหรือนำสิ่งที่เลือกออกทำให้จำนวนและประเภทที่เหลือเปลี่ยน ต้องบันทึกสภาพหลังแต่ละ ขั้นก่อนนับต่อ

ตรวจสอบสภาพหลังเลือก

รวมสิ่งที่เพิ่งย้ายเข้า และแยกผลลัพธ์ตามหมายเลขออกจากผลลัพธ์ตามสี การมีจำนวนสีเท่ากันไม่ ทำให้จำนวนลูกแต่ละสีเท่ากัน

ตัวอย่าง 8 กล่องแรกมีบัตรแดงสองขาวหนึ่ง กล่องสองมีแดงหนึ่งขาวสองน้ำเงินหนึ่ง ทุกใบมีหมายเลข ต่างกัน ย้ายจากกล่องแรกหนึ่งใบแล้วหยิบจากกล่องสอง จงนับผลลัพธ์แบบมีลำดับที่ใบแรกแดงและใบสอง ไม่ขาว

วิธีคิด ใบแรกเลือกแดงได้สองใบ หลังย้ายกล่องสองมีแดงสองและน้ำเงินหนึ่ง รวมไม่ขาวสามใบ จึงได้ $2 \cdot 3 = 6$ ผลลัพธ์ โดยหยิบใบที่เพิ่งย้ายได้

ตอบ 6 ผลลัพธ์

สรุป

กำหนดผลลัพธ์ ก่อน นับ คูณ ภายใน ขั้น ต่อเนื่อง และ บวก กรณีที่ไม่ทับ กัน ส่วนเติมเต็มลด จำนวน กรณี ส่วนร่วมแก่การนับซ้ำ ศูนย์นำหน้าและสภาพที่เปลี่ยนหลังเลือกต้องตรวจแยก

เรื่อง ความน่าจะเป็น

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 มีสมมุติต่างกันสี่แบบและปากกาต่างกันสามแบบ เลือกอย่างละหนึ่งชิ้นได้กี่ชุด

ตอบ

ข้อ 2 เดินทางโดยรถโดยสารได้ห้าสาย หรือรถไฟได้สองขบวน เลือกเพียงอย่างเดียวได้กี่วิธี

ตอบ

เรื่อง ความน่าจะเป็น

ตอนที่ 5 ปฏิบัติตัวอย่างและความน่าจะเป็นจากการนับ

เป้าหมาย สร้างปฏิบัติตัวอย่าง เลือกแบบจำลองการสุ่ม และคำนวณเหตุการณ์จากการนับ

5.1 การทดลองสุ่ม ปฏิบัติตัวอย่าง และเหตุการณ์

การทดลองสุ่มทราบผลลัพธ์ที่เป็นไปได้แต่ระบุผลล่วงหน้าแน่นอนไม่ได้ ปฏิบัติตัวอย่าง S คือเซตผลลัพธ์ทั้งหมด เหตุการณ์ E เป็นสับเซตของ S

ผลลัพธ์และน้ำหนักความน่าจะเป็น

$$E \subseteq S, \quad 0 \leq P(E) \leq 1, \quad P(S) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

ผลลัพธ์พื้นฐานต้องแยกแยะได้จากการทดลอง ส่วนค่าที่คำนวณจากผลลัพธ์ เช่น ผลรวมแต้ม อาจมีโอกาสนี้เท่ากัน

		ลูกที่หนึ่ง					
		1	2	3	4	5	6
ลูกที่สอง	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

แต่ละช่องแทนหนึ่งคู่แต้ม
ตัวเลขในช่องคือผลรวม
ผลรวมเจ็ดมีหกช่อง

ตัวอย่าง 33 ทอยลูกเต๋าเที่ยงตรงสองลูกอิสระ เปรียบเทียบโอกาสผลรวมเป็นสองกับเป็นเจ็ด

วิธีคิด คู่แต้มทั้ง 36 คู่มีโอกาสเท่ากัน ผลรวมสองมีเพียง (1, 1) แต่เจ็ดมีหกคู่ จึงมีโอกาส $\frac{1}{36}$ และ $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ไม่ใช่ผลรวมทุกค่ามีโอกาสเท่ากัน

ตอบ $\frac{1}{36}$ และ $\frac{1}{6}$

5.2 ความน่าจะเป็นจากการนับ

ผลลัพธ์พื้นฐานมีโอกาสเท่ากัน

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$n(S) > 0$ และ S เป็นเซตจำกัด ต้องใช้แบบจำลองเดียวกันทั้งเศษและส่วน เช่น นับชุดทั้งคู่หรือนับลำดับทั้งคู่

หากรวมผลลัพธ์ย่อยเป็นกลุ่ม ให้ตรวจว่าทุกกลุ่มมีจำนวนผลลัพธ์ย่อยเท่ากันก่อนนับกลุ่มเป็นหน่วยสุม

ตัวอย่าง 34 สุ่มบัตรสองใบพร้อมกันจากเลข 1, 2, 3, 4, 5 ทุกชุดเท่าเทียม จงหาโอกาสที่ผลรวมเป็นคู่

วิธีคิด ผลรวมคู่เมื่อคี่ทั้งคู่หรือคู่ทั้งคู่ ได้ $\binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 4$ ชุด จากทั้งหมด $\binom{5}{2} = 10$ จึงได้ $\frac{2}{5}$

ตอบ $\frac{2}{5}$

5.3 ผลลัพธ์ที่มีโอกาสไม่เท่ากัน

เมื่อกำหนดน้ำหนักไม่เท่ากัน ต้องรวมความน่าจะเป็นรายผลลัพธ์ ไม่ใช่จำนวนผลลัพธ์ที่ต้องการหารจำนวนทั้งหมดโดยตรง

การรวมและปรับน้ำหนัก

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\{\omega\}), \quad \sum_{\omega \in S} P(\{\omega\}) = 1$$

ถ้าผลลัพธ์ ω_i มีน้ำหนัก $w_i \geq 0$ และผลรวมน้ำหนักเป็นบวก ใช้ $P(\{\omega_i\}) = \frac{w_i}{\sum_j w_j}$

ตัวอย่าง 35 ลูกเต๋ามีโอกาสหน้าคู่แต่ละหน้าเป็นสองเท่าของหน้าคี่แต่ละหน้า โดยโอกาสภายในกลุ่มเท่ากัน จงหาโอกาสออกเลขมากกว่าสี่

วิธีคิด หน้าคี่มีน้ำหนักหนึ่ง หน้าคู่สอง รวม $3 + 6 = 9$ หน้า 5, 6 มีน้ำหนัก $1 + 2 = 3$ จึงได้ $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

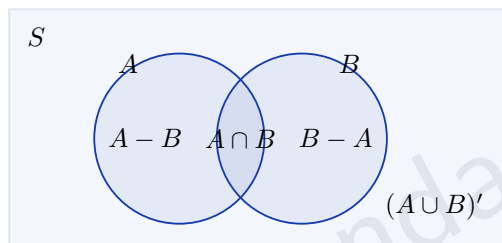
ตอบ $\frac{1}{3}$

5.4 ภาษาเหตุการณ์และบริเวณในแผนภาพ

แปลเงื่อนไขเป็นเหตุการณ์

เงื่อนไข	สัญลักษณ์
อย่างน้อยหนึ่งใน A, B	$A \cup B$
ทั้ง A และ B	$A \cap B$
A แต่ไม่ B	$A - B = A \cap B'$
ไม่เกิดทั้งสอง	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$P(E') = 1 - P(E)$$



สี่บริเวณไม่ทับกันและรวมเป็นปริภูมิตัวอย่าง S

คำว่าไม่เกิดทั้งสองในหัวข้อนี้หมายถึงไม่เกิด A และไม่เกิด B ต่างจากการไม่เกิดพร้อมกันซึ่งอนุญาตให้เกิดเพียงเหตุการณ์เดียวได้

ตัวอย่าง 36 ความน่าจะเป็นของ A อย่างเดียว B อย่างเดียว และส่วนร่วม เป็น $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ ตามลำดับ จงหาโอกาสไม่เกิดทั้งสอง

วิธีคิด สามบริเวณไม่ทับกันรวมเป็นยูเนียน โอกาสนอกยูเนียนคือ $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{9}{20}$

ตอบ $\frac{9}{20}$

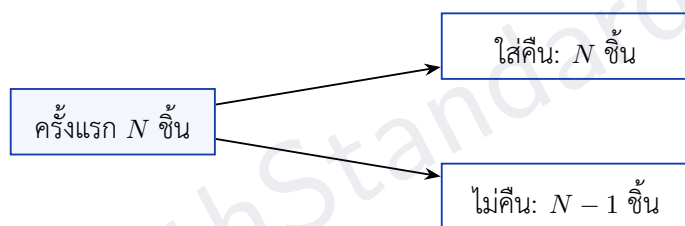
5.5 หยิบพร้อมกัน ใส่คืน และไม่ใส่คืน

ของต่างกัน N ชิ้น สุ่มเท่าเทียม การใส่คืนทำให้ของยังมีครบในการสุ่มครั้งถัดไป ส่วนไม่ใส่คืนทำให้จำนวนและสัดส่วนอาจเปลี่ยน

ปฏิกิริยาตัวอย่างของการหยิบ r ชิ้น

วิธีสุ่ม	จำนวนผลลัพธ์
พร้อมกัน ไม่สนใจลำดับ	$\binom{N}{r}$
ทีละชิ้นไม่คืน ติดตามลำดับ	$P_{N,r}$
ทีละชิ้นใส่คืน สุ่มอิสระ	N^r

การหยิบพร้อมกันกับทีละชิ้นไม่คืนให้โอกาสเท่ากันสำหรับเหตุการณ์ที่ไม่ขึ้นกับลำดับ เมื่อการสุ่มทำให้ทุกชุดมีโอกาสเท่ากัน



ตัวอย่าง 37 แดงสี่ขาวสอง สุ่มสองลูก จงเปรียบเทียบโอกาสแดงทั้งสองเมื่อใส่คืนกับไม่คืน

วิธีคิด ใส่คืนและสุ่มอิสระได้ $\left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ไม่คืนได้ $\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5}$ ซึ่งตรงกับหยิบพร้อมกัน $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}$

ตอบ ใส่คืน $\frac{4}{9}$ ไม่คืน $\frac{2}{5}$

5.6 หลายประเภทและเครื่องหมายของผลคูณ

การเลือกหลายประเภทใช้การจัดหมู่ในแต่ละประเภทแล้วคูณ หากเงื่อนไขอนุญาตหลายจำนวน ต้องรวมกรณีที่ไม่ทับกัน

สองประเภทจำนวน a, b ขึ้น

$$P(\text{ประเภทแรก } j \text{ ขึ้นจาก } r) = \frac{\binom{a}{j} \binom{b}{r-j}}{\binom{a+b}{r}}$$

ทุกชุด r ขึ้นต้องมีโอกาสเท่ากัน ผลคูณลบต้องไม่มีศูนย์และมีจำนวนลบเป็นจำนวนคี่ ผลคูณคี่ต้องเลือกแต่จำนวนคี่

ตัวอย่าง 38 บัตรจำนวนลบสามใบและบวกสี่ใบ สุ่มพร้อมกันสามใบทุกชุดเท่าเทียม จงหาโอกาสผลคูณลบ

วิธีคิด เลือกจำนวนลบหนึ่งหรือสามใบ ได้ $\binom{3}{1} \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 19$ ชุด จาก $\binom{7}{3} = 35$ ชุด จึงได้ $\frac{19}{35}$

ตอบ $\frac{19}{35}$

5.7 ความน่าจะเป็นจากตำแหน่งและเรขาคณิต

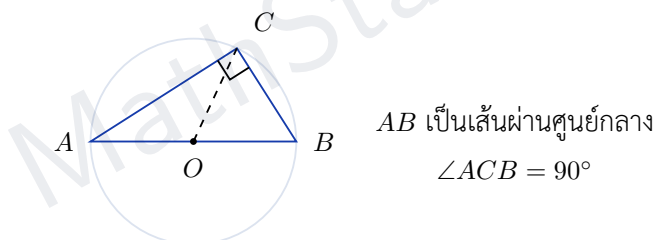
ถ้าสนใจเพียงคนบางคน อาจตรึงคนแรกแล้วนับตำแหน่งของคนที่เหลือ โดยต้องมีโอกาสเท่ากันทุกตำแหน่ง

ตำแหน่งรอบโต๊ะและจุดบนวงกลม

$$P(\text{สองคนติดกันรอบโต๊ะ } N \text{ คน}) = \frac{2}{N-1} \quad (N \geq 3)$$

$$P(\text{สามเหลี่ยมมุมฉาก}) = \frac{d(N-2)}{\binom{N}{3}}$$

สูตรที่สองใช้ N จุดต่างกันบนวงกลม สุ่มสามจุดเท่าเทียม และมีคู่ปลายเส้นผ่านศูนย์กลางทั้งหมด d คู่ สามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่งรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากด้านเดียวจึงไม่นับซ้ำ



ตัวอย่าง 39 หากจุดบนวงกลมมีคู่ปลายเส้นผ่านศูนย์กลางสองคู่ สุ่มสามจุดทุกชุดเท่าเทียม จงหาโอกาสได้สามเหลี่ยมมุมฉาก

วิธีคิด เลือกเส้นผ่านศูนย์กลางสองคู่และจุดที่สามอีกสี่ทางเลือก ได้แปดรูป จาก $\binom{6}{3} = 20$ รูป จึงมีโอกาส $\frac{2}{5}$

ตอบ $\frac{2}{5}$

5.8 คำที่มีอักษรซ้ำและตำแหน่งเดิม

การสุ่มคำที่มีอักษรซ้ำต้องกำหนดน้ำหนักของคำให้ชัด หากสุ่มตำแหน่งของอักษรชนิดหนึ่งเป็นหน่วย ต้องมีจำนวนวิธีเดิมอักษรที่เหลือเท่ากันทุกชุดตำแหน่ง

การอยู่ตำแหน่งเดิมพอดี

$$P(\text{อยู่ที่เดิมพอดี } k \text{ จาก } N) = \frac{\binom{N}{k} D_{N-k}}{N!}$$

ใช้เมื่อสิ่งของต่างกัน N ชิ้นสุ่มเรียงทุกลำดับเท่าเทียม D_m คือจำนวนการเรียง m ชิ้นโดยไม่มีตัวใดอยู่ที่เดิมตามหัวข้อ 4.3 การเรียงพอดีต้องห้ามส่วนที่เหลือตรงเพิ่ม

ตัวอย่าง 40 สุ่มเรียงของสี่ชิ้นทุกลำดับเท่าเทียม จงหาโอกาสมีชิ้นที่อยู่ตำแหน่งเดิมพอดีสองชิ้น

วิธีคิด เลือกสองชิ้นตรงได้ $\binom{4}{2} = 6$ อีกสองชิ้นต้องสลับกันได้แบบเดียว จำนวนที่ผ่านหกจาก 24 ได้ $\frac{1}{4}$

ตอบ $\frac{1}{4}$

สรุป

กำหนด ผลลัพธ์ พื้นฐาน ก่อน คำนวณ สูตร สัดส่วน จำนวน ใช้ เฉพาะ โอกาสเท่ากัน ใส่คืน กับ ไม่ คืนให้แบบจำลองต่างกัน การเลือกหลายประเภทใช้ชุดทั้งเศษและส่วน และคำว่าพอดีต้องตัดกรณีที่เกิดขึ้น

เรื่อง ความน่าจะเป็น

แบบฝึกหัดตอนที่ 5

ง่าย

ข้อ 81 โยนเหรียญเที่ยงตรงสามครั้งอย่างอิสระ จงหาโอกาสหัวทั้งสามครั้ง

ตอบ

ข้อ 82 ทอยลูกเต๋าเที่ยงตรงสองลูกอย่างอิสระ จงหาโอกาสผลรวมแต้มเป็นเก้า

ตอบ