



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น

www.mathstandard.com

เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น ครอบคลุมตัวแปรสุ่ม ตารางการแจกแจง ค่าคาดหวัง ความแปรปรวน การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง การแจกแจงทวินาม และการแจกแจงปกติ

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ ความน่าจะเป็น การจัดหมู่ ผลรวม สมการ และสถิติเบื้องต้น

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- X, Y แทนตัวแปรสุ่ม ส่วน x, y แทนค่าที่ตัวแปรนั้นรับได้ และ $P(X = x)$ คือความน่าจะเป็นที่ได้ค่าตามกำหนด
- $p_i = P(X = x_i)$ โดย $p_i \geq 0$ และ $\sum_i p_i = 1$ ใช้กับการแจกแจงไม่ต่อเนื่อง
- $E(X) = \mu_X$ คือค่าคาดหวัง $V(X) = \text{Var}(X) = \sigma_X^2$ คือความแปรปรวน และ σ_X คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
- $X \sim B(n, p)$ หมายถึงจำนวนสำเร็จจากการทดลองอิสระ n ครั้ง โดยโอกาสสำเร็จแต่ละครั้งคงที่เท่ากับ p
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ หมายถึงการแจกแจงปกติ พารามิเตอร์ตัวที่สองเป็นความแปรปรวน จึงต้องถอดรากก่อนใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
- $Z \sim N(0, 1)$ และ $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ ตารางในเอกสารนี้เป็นพื้นที่ทางซ้าย ใช้ค่าที่กำหนดในโจทย์หรือตารางท้ายเนื้อหา ไม่ปิดซ้ำระหว่างชั้น
- ความน่าจะเป็นจากตารางปกติเป็นค่าประมาณ หากไม่ได้กำหนดเป็นอย่างอื่น ให้แสดงความน่าจะเป็นสี่ตำแหน่งทศนิยมและเกณฑ์ค่าตัวแปรสองตำแหน่ง
- จำนวนคาดหวังอาจไม่เป็นจำนวนเต็ม และ ค่าคาดหวังไม่จำเป็นต้องเป็นค่าที่เกิดขึ้นได้ในการทดลองครั้งเดียว

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 ตัวแปรสุ่มและตารางการแจกแจง	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–20	10
ตอนที่ 2 ค่าคาดหวังและการกระจาย	
เนื้อหาและตัวอย่าง	21
แบบฝึกหัดข้อ 21–40	26
ตอนที่ 3 การแจกแจงเอกรูปและการสุ่มไม่คืน	
เนื้อหาและตัวอย่าง	36
แบบฝึกหัดข้อ 41–60	41

เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 การแจกแจงทวินาม

เนื้อหาและตัวอย่าง	51
แบบฝึกหัดข้อ 61–80	56

ตอนที่ 5 การแจกแจงปกติและปกติมาตรฐาน

เนื้อหาและตัวอย่าง	66
แบบฝึกหัดข้อ 81–100	72

ตอนที่ 6 การประยุกต์และการวิเคราะห์แบบจำลอง

เนื้อหาและตัวอย่าง	82
แบบฝึกหัดข้อ 101–120	88
สรุปเนื้อหา เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น	98
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	101
เฉลยเฉพาะคำตอบ	113
เฉลยวิธีคิด	120

เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น

ตอนที่ 1 ตัวแปรสุ่มและตารางการแจกแจง

เป้าหมาย กำหนดตัวแปร สร้างการแจกแจง และแปลเหตุการณ์เป็นค่าหรือพื้นที่ได้

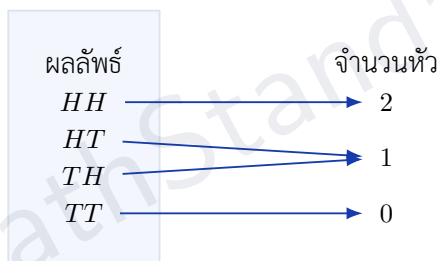
1.1 ตัวแปรสุ่มและค่าที่รับได้

ตัวแปรสุ่มเป็น ฟังก์ชันที่กำหนดจำนวนจริงหนึ่งค่าให้ผลลัพธ์แต่ละผลลัพธ์ของการทดลองสุ่ม ผลลัพธ์ต่างกันอาจให้ค่าตัวแปรสุ่มเดียวกันได้

แยกผลลัพธ์ออกจากค่าของตัวแปร

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto X(\omega)$$

S คือปริภูมิตัวอย่าง ω คือผลลัพธ์หนึ่ง และ $X(\omega)$ คือค่าที่กำหนดให้ผลลัพธ์นั้น การกำหนด X ต้องบอกสิ่งที่นับ วัด หรือคำนวณให้ชัดเจน



ตัวอย่าง 1 โยนเหรียญเที่ยงตรงสองครั้งอิสระ ให้ X เป็นจำนวนหัว จงระบุค่าของ X จากแต่ละผลลัพธ์
วิธีคิด ปริภูมิตัวอย่าง คือ HH, HT, TH, TT โดย H แทน หัว และ T แทน ก้อย จับคู่ ได้
 $HH \mapsto 2, HT \mapsto 1, TH \mapsto 1, TT \mapsto 0$

ตอบ X รับค่า 0, 1, 2 โดยค่าหนึ่งมาจากสองผลลัพธ์

1.2 ชนิดของตัวแปรสุ่ม

ไม่ต่อเนื่องและต่อเนื่อง

- **ไม่ต่อเนื่อง** รับค่าได้เป็นจำนวนจำกัดหรือเรียงนับได้ เช่น จำนวนชิ้นงานชำรุด จำนวนครั้งสำเร็จ ผลรวมแต้มลูกเต๋า
- **ต่อเนื่อง** ใช้แบบจำลองค่าที่วัดได้บนช่วง เช่น เวลา ความยาว น้ำหนัก ความน่าจะเป็นกำหนดจากพื้นที่ใต้กราฟความหนาแน่น

การบันทึกผลการวัดที่ปิดทศนิยมทำให้ข้อมูลที่บันทึกมีค่าจำกัดตามความละเอียด แต่ตัวแปรก่อนปิดยังอาจใช้แบบจำลองต่อเนื่องได้ ต้องแยกตัวแปรที่ศึกษาออกจากวิธีบันทึกข้อมูล

ตัวอย่าง 2 ให้ D เป็นจำนวนผู้โดยสาร และ T เป็นเวลาารถก่อนปิดเศษ จงจำแนกชนิดของตัวแปรสุ่ม
วิธีคิด D นับเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ จึงไม่ต่อเนื่อง ส่วน T วัดได้ในช่วงเวลา จึงใช้แบบจำลองต่อเนื่อง
ตอบ D ไม่ต่อเนื่อง และ T ต่อเนื่อง

1.3 ตารางการแจกแจงความน่าจะเป็น

สำหรับตัวแปรไม่ต่อเนื่อง ให้รวมโอกาสของผลลัพธ์ทุกผลลัพธ์ที่ทำให้ X มีค่าเท่ากัน แล้วแสดงค่าที่เป็นไปได้พร้อมความน่าจะเป็น

เงื่อนไขของการแจกแจงไม่ต่อเนื่อง

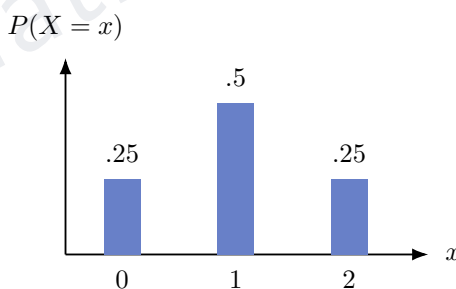
$$p_i = P(X = x_i), \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1$$

เมื่อผลลัพธ์พื้นฐานใน S มีโอกาสเท่ากัน

$$P(X = x) = \frac{n(\{\omega \in S : X(\omega) = x\})}{n(S)}$$

n หมายถึงจำนวนสมาชิก ต้องนับจากผลลัพธ์พื้นฐาน ไม่ใช่ถือว่าค่าตัวแปรสุ่มทุกค่ามีโอกาสเท่ากัน

ถ้าค่าตัวแปรสุ่มต่างกันมีจำนวนจำกัดและทุกค่ามีโอกาสเท่ากัน เรียกว่า **การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง**
 การที่ผลลัพธ์พื้นฐานเท่าเทียมไม่จำเป็นต้องทำให้ค่าตัวแปรเป็นเอกรูป



ตัวอย่าง 3 โยนเหรียญเที่ยงตรงสองครั้งอิสระ ให้ X นับหัว จงสร้างตารางการแจกแจง

วิธีคิด ผลลัพธ์พื้นฐานสี่แบบมีโอกาสแบบละ $\frac{1}{4}$ ค่าศูนย์เกิดหนึ่งแบบ ค่าหนึ่งเกิดสองแบบ และค่าสองเกิดหนึ่งแบบ จึงได้ $P(X=0) = \frac{1}{4}$, $P(X=1) = \frac{1}{2}$, $P(X=2) = \frac{1}{4}$

ตอบ ความน่าจะเป็นของ 0, 1, 2 คือ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ตามลำดับ

1.4 การหาค่าคงตัวในตาราง

เมื่อความน่าจะเป็นมีพารามิเตอร์ ให้เริ่มจากผลรวมเท่ากับหนึ่ง แล้วตรวจสอบทุกค่าไม่ติดลบ หากมีเงื่อนไขเพิ่มเติม เช่น ค่าเฉลี่ย ให้ตั้งสมการอีกสมการหนึ่ง

ขั้นพิจารณาพารามิเตอร์

$$\sum_i p_i(\theta) = 1, \quad p_i(\theta) \geq 0 \text{ ทุก } i$$

θ คือพารามิเตอร์ที่ต้องหา สมการผลรวมอย่างเดียวอาจมีหลายคำตอบหรือไม่ให้ข้อมูลใหม่ จึงต้องตรวจสอบเงื่อนไขของโจทย์ร่วมกัน

ตัวอย่าง 4 X รับค่า 1, 2, 3 และ $P(X = x) = cx$ จงหา c และ $P(X \geq 2)$

วิธีคิด ผลรวม $c + 2c + 3c = 1$ ให้ $c = \frac{1}{6}$ ทุกค่าไม่ติดลบ แล้ว $P(X \geq 2) = 2c + 3c = \frac{5}{6}$

ตอบ $c = \frac{1}{6}$, $P(X \geq 2) = \frac{5}{6}$

1.5 การอ่านเหตุการณ์และความน่าจะเป็นสะสม

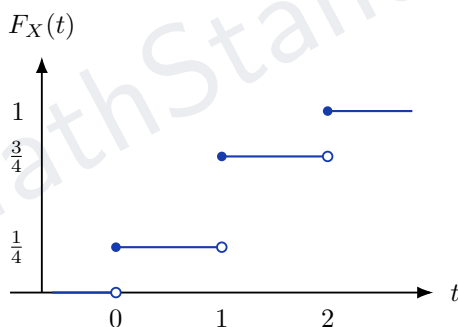
เหตุการณ์เกี่ยวกับตัวแปรสุ่มแปลเป็นค่าที่ผ่านเงื่อนไขก่อนรวมโอกาส ตัวแปรไม่ต่อเนื่องต้องระวังการรวมค่าที่ขอบช่วง

ความน่าจะเป็นสะสม

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{x_i \leq t} p_i$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

t, a, b เป็นจำนวนจริง โดย $a < b$ ฟังก์ชัน F_X ไม่ลดลงและมีค่าตั้งแต่ศูนย์ถึงหนึ่ง หากต้องการ $P(a \leq X \leq b)$ ต้องรวมมวลที่ a ด้วย



ตัวอย่าง 5 X รับค่า $0, 1, 2$ ด้วยโอกาส $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ จงหา $F_X(1)$ และ $P(0 < X \leq 2)$

วิธีคิด $F_X(1)$ รวมค่าศูนย์และหนึ่งจึงเท่ากับ $\frac{3}{4}$ ส่วนเงื่อนไข $0 < X \leq 2$ รวมหนึ่งกับสองได้ $\frac{3}{4}$ หรือใช้

$$F_X(2) - F_X(0) = 1 - \frac{1}{4}$$

ตอบ ทั้งสองค่าเท่ากับ $\frac{3}{4}$

1.6 การแจกแจงของตัวแปรที่แปลงแล้ว

ถ้า $Y = g(X)$ ให้แทนค่าของ X ทุกค่า แล้วรวมโอกาสเมื่อได้ค่า Y ซ้ำกัน วิธีนี้ใช้ได้ทั้งการแปลงเชิงเส้นและการแปลงที่ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

รวมความน่าจะเป็นตามค่าที่แปลง

$$P(Y = y) = \sum_{\{x_i: g(x_i)=y\}} P(X = x_i)$$

g คือกฎการแปลง การเปลี่ยนค่าตัวแปรไม่ทำให้โอกาสหายไป แต่บางค่าอาจถูกรวมกัน

ตัวอย่าง 6 X รับค่า $-1, 0, 1$ ด้วยโอกาส $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ให้ $Y = X^2$ จงหาการแจกแจงของ Y

วิธีคิด เมื่อ $X = -1, 1$ จะได้ $Y = 1$ เหมือนกัน จึงรวมโอกาส $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ส่วน $X = 0$ ให้ $Y = 0$ ด้วยโอกาส $\frac{1}{2}$

ตอบ $P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$

1.7 ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และเงื่อนไข

การแจกแจงของค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดหาได้จากการนับค่าของคู่ตัวแปร หรือใช้เหตุการณ์สะสม เมื่อให้ข้อมูลเพิ่มเติมต้องปรับน้ำหนักความน่าจะเป็นภายในเหตุการณ์ที่ทราบ

เหตุการณ์ช่วยคำนวณ

ถ้า $M = \max(X, Y)$ และ $L = \min(X, Y)$

$$P(M \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t), \quad P(L \geq t) = P(X \geq t, Y \geq t)$$

ถ้า X, Y อิสระ จึงคูณความน่าจะเป็นด้านขวาได้ ส่วนการกำหนดเงื่อนไข B ใช้

$$P(X = x | B) = \frac{P(\{X = x\} \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) > 0)$$

ตัวอย่าง 7 สุ่ม X, Y อิสระเท่าเทียมจาก 1, 2, 3 ให้ $L = \min(X, Y)$ จงสร้างการแจกแจงของ L

วิธีคิด แก้วคู่อันดับมีโอกาสเท่ากัน ค่า $L = 3$ เกิดเฉพาะ (3, 3) หนึ่งคู่ ค่า $L = 2$ เกิด (2, 2), (2, 3), (3, 2) สามคู่ ที่เหลือห้าคู่อันดับมี $L = 1$

ตอบ ค่า 1, 2, 3 มีโอกาส $\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}$ ตามลำดับ

1.8 แบบจำลองต่อเนื่องและความหนาแน่น

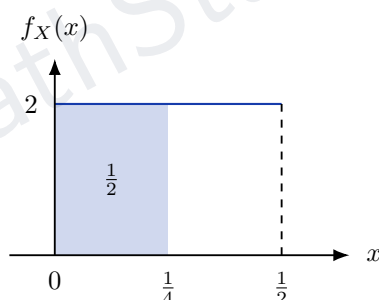
ความสูงของกราฟความหนาแน่นไม่ใช่ความน่าจะเป็นที่จุดหนึ่ง ความน่าจะเป็นของช่วงคือพื้นที่ใต้กราฟเหนือช่วงนั้น

พื้นที่รวมหนึ่ง

$$f_X(x) \geq 0, \quad \text{พื้นที่ใต้กราฟทั้งหมด} = 1$$

$$P(a < X < b) = \text{พื้นที่ใต้ } f_X \text{ จาก } a \text{ ถึง } b, \quad P(X = a) = 0$$

สำหรับตัวแปรต่อเนื่อง การรวมปลายช่วงหรือไม่รวมปลายช่วงให้ความน่าจะเป็นเท่ากัน ค่า $f_X(x)$ อาจมากกว่าหนึ่งได้ หากพื้นที่รวมยังเท่ากับหนึ่ง



ตัวอย่าง 8 X มีความหนาแน่นคงที่สองบนช่วง $0 < x < \frac{1}{2}$ และศูนย์ภายนอก จงหา $P(X = \frac{1}{4})$ และ $P(0 < X < \frac{1}{4})$

วิธีคิด จุดเดียวมีพื้นที่ศูนย์ ส่วนช่วงยาว $\frac{1}{4}$ มีพื้นที่สี่เหลี่ยม $2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ ความสูงสองไม่ใช่โอกาสที่จุด

ตอบ 0 และ $\frac{1}{2}$

สรุป

กำหนดตัวแปรก่อนสร้างตาราง รวมผลลัพธ์ที่ให้ค่าเดียวกัน ตรวจสอบผลรวมหนึ่งและทุกโอกาสไม่ติดลบ เหตุการณ์ของตัวแปรไม่ต่อเนื่องใช้ผลรวม ส่วนตัวแปรต่อเนื่องใช้พื้นที่และไม่มีมวลที่จุด

เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 โยนเหรียญสองครั้ง ให้ X เป็นจำนวนหัว จงหาค่า X ของผลลัพธ์ HT, TT, HH โดย H แทนหัว T แทนก้อย

ตอบ

เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น

ตอนที่ 4 การแจกแจงทวินาม

เป้าหมาย ตรวจสอบเงื่อนไขทวินาม คำนวณช่วงจำนวน และวิเคราะห์พารามิเตอร์หรือการทดลองหลายระดับได้

4.1 เงื่อนไขของการทดลองทวินาม

คำว่า “สำเร็จ” เป็นชื่อเหตุการณ์ที่สนใจ ไม่จำเป็นต้องเป็นผลดี เช่น อาจกำหนดให้สำเร็จหมายถึงพบชิ้นงานชำรุด

เงื่อนไขที่ต้องครบ

- ทดลองจำนวน n ครั้งที่กำหนดไว้ โดย n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ
- แต่ละครั้งจำแนกเป็นสำเร็จหรือไม่สำเร็จ
- การทดลองแต่ละครั้งอิสระกัน และโอกาสสำเร็จคงที่เท่ากับ p
- ตัวแปร X นับจำนวนครั้งสำเร็จ จึงรับค่า $0, 1, \dots, n$

เขียน $X \sim B(n, p)$ โดย $0 \leq p \leq 1$

ตัวอย่าง 25 ตรวจงานสี่ชิ้นอิสระ โอกาสชำรุดแต่ละชิ้น $\frac{1}{10}$ ให้ X นับชำรุด จงระบุแบบจำลอง และเปรียบเทียบกับสุ่มสี่ชิ้นไม่คืนจากกล่องเล็ก

วิธีคิด กรณีแรกจำนวนครั้งคงที่ อิสระ และโอกาสคงที่ จึงเป็น $B(4, \frac{1}{10})$ กรณีไม่คืนจากกล่องเล็ก โอกาสชำรุดเปลี่ยนตามสิ่งที่หยิบแล้ว จึงไม่ถือเป็นทวินามโดยตรง

ตอบ กรณีแรก $X \sim B(4, \frac{1}{10})$ ส่วนกรณีไม่คืนต้องใช้ข้อมูลประชากร

4.2 สูตรความน่าจะเป็นของจำนวนสำเร็จ

เมื่อกำหนดตำแหน่งสำเร็จ r ตำแหน่ง ลำดับนั้นมีโอกาส $p^r(1-p)^{n-r}$ และเลือกตำแหน่งสำเร็จได้ $\binom{n}{r}$ แบบที่ไม่ทับกัน

ความน่าจะเป็นทวินาม

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, \quad r = 0, \dots, n$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

n คือจำนวนทดลอง r คือจำนวนสำเร็จ p คือโอกาสสำเร็จ และ $1-p$ คือโอกาสไม่สำเร็จ สูตรผลคูณทั่วไปใช้ $0 < p < 1$ ส่วน $p = 0, 1$ ตัวแปรเป็นค่าคงตัว

SSFF	S สำเร็จ F ไม่สำเร็จ
SFSF	เลือกสองตำแหน่งจากสี่
SFFS	$\binom{4}{2} = 6$ แบบ
FSSF	แต่ละแบบมีโอกาส $p^2(1-p)^2$
FSFS	
FFSS	

ตัวอย่าง 26 เพาะเมล็ดสี่เมล็ด แต่ละเมล็ดงอกด้วยโอกาส $\frac{1}{2}$ อิสระ จงหาโอกาสงอกพอดีสองเมล็ด

วิธีคิด ให้ X นับงอก ได้ $X \sim B(4, \frac{1}{2})$ จัดตำแหน่งเมล็ดงอกสองจากสี่ได้หกแบบ แต่ละแบบมีโอกาส $\frac{1}{16}$

$$\text{รวม } \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

ตอบ $\frac{3}{8}$

4.3 ช่วงจำนวนและส่วนเติมเต็ม

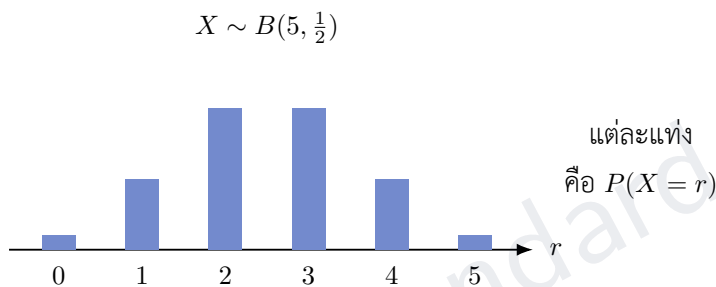
แปลงถ้อยคำเป็นค่าที่ต้องรวม

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{r=a}^b \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

รวมเฉพาะดัชนี $0 \leq r \leq n$ โดย $[a]$ คือจำนวนเต็มต่ำสุดที่ไม่น้อยกว่า a และ $[b]$ คือจำนวนเต็มสูงสุดที่ไม่เกิน b

$$P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n, \quad P(X \leq n-1) = 1 - p^n$$

“มากกว่า k ” เริ่มที่ $k+1$ แต่ “อย่างน้อย k ” รวม k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม



ตัวอย่าง 27 $X \sim B(5, \frac{1}{2})$ จงหา $P(X \geq 4)$ และ $P(X \geq 1)$

วิธีคิด กรณีแรกบวก $P(X=4) + P(X=5) = \frac{5+1}{32} = \frac{3}{16}$ กรณีที่สองลบกรณีศูนย์จากหนึ่ง ได้

$$1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

ตอบ $\frac{3}{16}$ และ $\frac{31}{32}$

4.4 ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน และการแปลง

ให้ $X \sim B(n, p)$

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p), \quad \sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$$

ถ้า $Y = aX + b$ โดย a, b คงตัว

$$E(Y) = anp + b, \quad V(Y) = a^2np(1-p)$$

ตัวแปร Y ไม่จำเป็นต้องนับจำนวนสำเร็จ จึงไม่ควรเรียก Y ว่าทวินามเพียงเพราะสร้างจาก X

ตัวอย่าง 28 ผ่านงานแต่ละชิ้นด้วยโอกาส $\frac{3}{4}$ อิสระ ตรวจแปดชิ้น จ่ายรางวัลขึ้นผ่านละสองบาท หักค่าใช้จ่ายห้าบาท จงหากำไรคาดหวังและความแปรปรวน

วิธีคิด ให้ X นับชิ้นผ่าน ได้ $E(X) = 8(\frac{3}{4}) = 6$, $V(X) = 8(\frac{3}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{3}{2}$ ถ้าไร $G = 2X - 5$ จึงเฉลี่ย

เจ็ดและความแปรปรวน $4(\frac{3}{2}) = 6$

ตอบ 7 บาท และ 6 บาทกำลังสอง

4.5 ย้อนหาพารามิเตอร์

ทราบ $\mu = E(X) > 0$ และ $v = V(X)$

$$1-p = \frac{v}{\mu}, \quad p = 1 - \frac{v}{\mu}, \quad n = \frac{\mu}{p} \quad (p > 0)$$

ตรวจ $0 < p \leq 1$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่สุดค้องโจทย์ ถ้า $0 < p < 1$ ต้องมี $0 < v < \mu$ อีกแนวหนึ่งคือใช้ $P(X=0) = (1-p)^n$ เมื่อทราบ n

ตัวอย่าง 29 $X \sim B(n, p)$ มีค่าเฉลี่ยสองและความแปรปรวนหนึ่ง จงหา n, p และ $P(X = 0)$

วิธีคิด หาค่าความแปรปรวนด้วยค่าเฉลี่ยได้ $1 - p = \frac{1}{2}$ จึง $p = \frac{1}{2}$ จาก $np = 2$ ได้ $n = 4$ และ

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

ตอบ $n = 4, p = \frac{1}{2}, P(X = 0) = \frac{1}{16}$

4.6 จำนวนครั้งต่ำสุด

เงื่อนไขโอกาสสำเร็จอย่างน้อยหนึ่งครั้งมักใช้ส่วนเติมเต็มก่อน แล้วแก้สมการของ $(1 - p)^n$ ต้องตรวจว่า โจทย์ใช้มากกว่า หรือไม่น้อยกว่า และปิดจำนวนครั้งไปยังจำนวนเต็มที่ผ่านมาเงื่อนไขจริง

ให้ $0 < p < 1$ และระดับเป้าหมาย $0 < q < 1$

$$P(X \geq 1) \geq q \iff (1 - p)^n \leq 1 - q$$

อาจเทียบกำลังโดยตรง หรือใช้ลอการิทึม

$$n \geq \frac{\log(1 - q)}{\log(1 - p)}$$

เพราะ $\log(1 - p) < 0$ ต้องกลับเครื่องหมายเมื่อหาร จากนั้นเลือกจำนวนเต็มต่ำสุดและแทนตรวจขอบเขต

ตัวอย่าง 30 การตรวจแต่ละครั้งพบข้อบกพร่องด้วยโอกาส $\frac{1}{2}$ อิสระ ต้องตรวจอย่างน้อยกี่ครั้งจึงมีโอกาสพบอย่างน้อยหนึ่งครั้งมากกว่า $\frac{7}{8}$

วิธีคิด ต้องมี $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{8}$ ที่ $n = 3$ ได้เท่ากับขอบเขตจึงยังไม่ผ่าน ต้อง $n = 4$ ซึ่งให้โอกาส $\frac{15}{16} > \frac{7}{8}$

ตอบ 4 ครั้ง

4.7 ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข

กำหนดข้อมูลเกี่ยวกับจำนวนสำเร็จ

$$P(X = r | X \geq k) = \frac{P(X = r)}{P(X \geq k)} \quad (r \geq k)$$

เมื่อส่วนเป็นบวก การมีเงื่อนไขอาจทำให้การแจกแจงที่เหลือไม่เป็นทวินาม จึงไม่เปลี่ยน n หรือ p โดยไม่มีเหตุผล

ตัวอย่าง 31 $X \sim B(3, \frac{1}{2})$ ทราบว่ามีสำเร็จอย่างน้อยหนึ่งครั้ง จงหาโอกาสสำเร็จพอดีสองครั้ง

วิธีคิด ตัวเศษ $P(X = 2) = \frac{3}{8}$ ตัวส่วน $P(X \geq 1) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ หารได้ $\frac{3}{7}$

ตอบ $\frac{3}{7}$

4.8 โอกาสสำเร็จที่ได้จากอีกการทดลอง

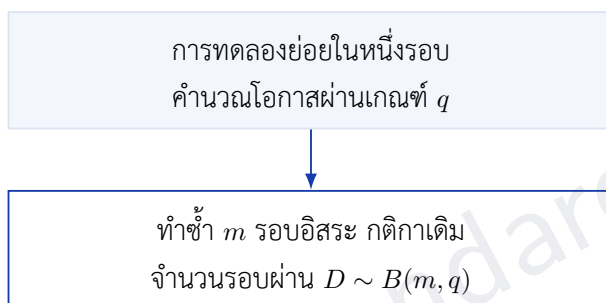
บางสถานการณ์ต้องหาความน่าจะเป็นของหนึ่งรอบก่อน เช่น หนึ่งวันผ่านเกณฑ์จากการตรวจหลายชิ้น แล้วจึงนับจำนวนรอบที่ผ่านเกณฑ์

แบบจำลองสองระดับ

ถ้า q คือโอกาสที่หนึ่งรอบผ่านเกณฑ์ และมี m รอบอิสระที่ใช้กติกาเดียวกัน ให้ D นับรอบที่ผ่าน จะได้

$$D \sim B(m, q), \quad E(D) = mq, \quad V(D) = mq(1 - q)$$

ต้องคำนวณ q จากเหตุการณ์ของหนึ่งรอบก่อน ไม่ใช่โอกาสสำเร็จของการทดลองย่อยแทนทันที



ตัวอย่าง 32 หนึ่งวันตรวจสามชิ้นอิสระ แต่ละชิ้นผ่านด้วยโอกาส $\frac{1}{2}$ วันดีเมื่อผ่านอย่างน้อยสองชิ้น ตรวจหกวันอิสระ จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของจำนวนวันดี

วิธีคิด วันหนึ่งมีโอกาสดี $q = \frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{3}}{8} = \frac{1}{2}$ ให้ D นับวันดี จึง $D \sim B(6, \frac{1}{2})$ ได้ค่าเฉลี่ยสามและความแปรปรวน $\frac{3}{2}$

ตอบ 3 วัน และ $\frac{3}{2}$ วันกำลังสอง

สรุป

ตรวจจำนวนครั้งที่ สองประเภท อิสระ และโอกาสคงที่ก่อนใช้ทวินาม พอดีใช้หนึ่งพจน์ ช่วงใช้ผลรวมอย่างน้อยหนึ่งใช้ส่วนเต็มเต็ม ย้อนพารามิเตอร์ต้องตรวจจำนวนเต็ม และแบบจำลองซ้อนต้องหาโอกาสของหนึ่งรอบก่อน

เรื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็น

แบบฝึกหัดตอนที่ 4

ง่าย

ข้อ 61 โยนเหรียญเที่ยงตรงห้าครั้งอย่างอิสระ ให้ X เป็นจำนวนหัว จงระบุ การแจกแจง และค่าพารามิเตอร์

ตอบ

ข้อ 62 $X \sim B(4, \frac{1}{2})$ จงหา $P(X = 2)$

ตอบ