



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง ทฤษฎีจำนวน

www.mathstandard.com

เรื่อง ทฤษฎีจำนวน

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสาร ประกอบการเรียน เรื่อง ทฤษฎีจำนวน ครอบคลุม สมบัติ ของ จำนวนเต็ม การ ทหารลงตัว จำนวนเฉพาะ ตัวหาร ห.ร.ม. ค.ร.น. ยุคลิต เบซู สมการจำนวนเต็ม สมภาค และการประยุกต์

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ จำนวนเต็ม เศษส่วน เลขยกกำลัง การแยกตัวประกอบ สมการเชิงเส้น และ สัญลักษณ์ของเซต

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ไม่รวมศูนย์ ส่วน $\mathbb{Z}$ แทนจำนวนเต็ม และ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ แทนจำนวนเต็มไม่ลบ
- ตัวหารในการหารจำนวนเต็มไม่เป็นศูนย์ และเศษอยู่ในช่วง $0 \leq r < |b|$ เมื่อ b เป็นตัวหาร
- $\gcd(a, b)$ แทน ห.ร.ม. ที่เป็นบวก โดย a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ส่วน $\text{lcm}(a, b)$ ใช้กับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่
- $\tau(N)$ แทนจำนวนตัวหารบวก และ $\sigma(N)$ แทนผลบวกตัวหารบวกของ $N > 0$
- จำนวนเฉพาะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1 ตัวหารบวกและตัวหารทั้งหมดเป็นคนละกลุ่ม
- การสุ่มจำนวนจากช่วงที่กำหนดถือว่าทุกจำนวนมีโอกาสถูกเลือกเท่ากัน เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น
- ตัวแปรในแต่ละข้อ ใช้ตามขอบเขตของข้อนั้น คำตอบที่เป็นปริมาณระบุหน่วย และเศษส่วนเขียนอย่างต่ำ

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ทฤษฎีจำนวน

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 จำนวนเต็มและการหารลงตัว	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–14	7
ตอนที่ 2 จำนวนเฉพาะและตัวหาร	
เนื้อหาและตัวอย่าง	16
แบบฝึกหัดข้อ 15–28	21
ตอนที่ 3 ห.ร.ม. ค.ร.น. และจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์	
เนื้อหาและตัวอย่าง	30
แบบฝึกหัดข้อ 29–42	34
ตอนที่ 4 ยุคคิด เบซู และสมการจำนวนเต็ม	
เนื้อหาและตัวอย่าง	43
แบบฝึกหัดข้อ 43–56	47

เรื่อง ทฤษฎีจำนวน

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 สมภาคและการคำนวณเศษ

เนื้อหาและตัวอย่าง	56
แบบฝึกหัดข้อ 57–70	61

ตอนที่ 6 การนับจำนวนเต็มภายใต้เงื่อนไข

เนื้อหาและตัวอย่าง	70
แบบฝึกหัดข้อ 71–84	75

ตอนที่ 7 การประยุกต์และโจทย์แนวข้อสอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	84
แบบฝึกหัดข้อ 85–98	87

ตอนที่ 8 การประยุกต์ข้ามบท

เนื้อหาและตัวอย่าง	96
แบบฝึกหัดข้อ 99–112	100
สรุปเนื้อหา เรื่อง ทฤษฎีจำนวน	109
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	116
เฉลยเฉพาะคำตอบ	125
เฉลยวิธีคิด	132

เรื่อง ทฤษฎีจำนวน

ตอนที่ 1 จำนวนเต็มและการหารลงตัว

เป้าหมาย ใช้ความหมายและสมบัติของการหารลงตัว อธิบายผลหาร เศษ และจำนวนคู่คี่

1.1 จำนวนเต็ม ตัวหาร และพหุคูณ

ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ โดย $a \neq 0$ และให้ k เป็นจำนวนเต็ม

นิยามการหารลงตัว

$$a \mid b \iff b = ak \quad \text{สำหรับ } k \in \mathbb{Z} \text{ บางค่า}$$

a เป็นตัวหารของ b และ b เป็นพหุคูณของ a

- $a \nmid b$ หมายถึงไม่มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $b = ak$
- ตัวหารอาจเป็นลบได้ แต่การนับตัวหารบวกพิจารณาเฉพาะค่าบวก
- $a \mid 0$ สำหรับ $a \neq 0$ เพราะ $0 = a \cdot 0$

ตัวอย่าง 1 จงตรวจว่า $-8 \mid 56$ และ $8 \mid -56$ หรือไม่

วิธีคิด $56 = (-8)(-7)$ และ $-56 = 8(-7)$ โดยผลหารเป็นจำนวนเต็มทั้งสองกรณี

ตอบ หารลงตัวทั้งสองกรณี

1.2 สมบัติของการหารลงตัว

กำหนดตัวแปรที่ปรากฏเป็นจำนวนเต็ม และตัวหารไม่เป็นศูนย์

สมบัติพื้นฐาน

$$a \mid b \implies a \mid bc$$

$$a \mid b, a \mid c \implies a \mid (ub + vc) \quad (u, v \in \mathbb{Z})$$

$$a \mid b, b \mid c \implies a \mid c$$

$$a \mid b \iff |a| \mid |b|$$

- ผลรวมเชิงเส้นของจำนวนที่หารลงตัว ยังคงหารด้วยตัวหารเดิมลงตัว
- $a \mid bc$ ไม่รับรองว่า $a \mid b$ หรือ $a \mid c$ เช่น $6 \mid 2 \cdot 3$
- เมื่อ $a, b > 0$ และ $a \mid b$ จะมี $a \leq b$

ตัวอย่าง 2 ถ้า $5 \mid a$ และ $5 \mid b$ จงแสดงว่า $5 \mid (2a + 7b)$

วิธีคิด เขียน $a = 5u, b = 5v$ เมื่อ $u, v \in \mathbb{Z}$ ได้ $2a + 7b = 5(2u + 7v)$ ซึ่งวงเล็บเป็นจำนวนเต็ม

ตอบ $5 \mid (2a + 7b)$

1.3 ขั้นตอนวิธีการหาร

ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ และ $b \neq 0$ จะมีผลหาร q และเศษ r ที่เป็นจำนวนเต็มเพียงคู่เดียว

ผลหารและเศษ

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

- a คือตัวตั้ง b คือตัวหาร q คือผลหาร และ r คือเศษ
- เศษไม่เป็นลบ แม้ตัวตั้งหรือตัวหารเป็นลบ
- $r = 0$ ก็ต่อเมื่อ $b \mid a$ และโดยทั่วไป $b \mid (a - r)$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลหารและเศษของ -29 เมื่อหารด้วย 6

วิธีคิด เขียน $-29 = 6(-5) + 1$ โดย $0 \leq 1 < 6$ จึงได้ $q = -5, r = 1$ การเขียน $-29 = 6(-4) - 5$ ไม่ให้เศษตามนิยาม

ตอบ $q = -5, r = 1$

1.4 จำนวนคู่ จำนวนคี่ และการแยกกรณี

กำหนด $k \in \mathbb{Z}$ จำนวนคู่และจำนวนคี่มีรูปทั่วไปดังนี้

รูปจำนวนคู่และจำนวนคี่

$$\begin{aligned} \text{คู่} &: 2k, & \text{คี่} &: 2k + 1 \\ \text{คู่} + \text{คู่} &= \text{คู่}, & \text{คี่} + \text{คี่} &= \text{คู่}, & \text{คู่} + \text{คี่} &= \text{คี่} \end{aligned}$$

- ศูนย์เป็นจำนวนคู่ และจำนวนลบจำแนกคู่คี่ได้เช่นเดียวกัน
- ผลคูณเป็นคี่ก็ต่อเมื่อตัวประกอบทุกตัวเป็นคี่
- กำลังสองมีพาริตีเดียวกับฐาน ใช้แยกกรณีเพื่อพิสูจน์ข้อความทั่วไป

ตัวอย่าง 4 ให้ a เป็นคู่และ b เป็นคี่ จงจำแนก $a^2 + 3b + 2$

วิธีคิด a^2 เป็นคู่ $3b$ เป็นคี่ และ 2 เป็นคู่ ผลรวมจึงเป็นคี่

ตอบ เป็นจำนวนคี่

1.5 เกณฑ์การหารลงตัวที่ใช้บ่อย

เกณฑ์ต่อไปนี้ใช้กับการเขียนจำนวนเต็มในระบบฐานสิบ เครื่องหมายของจำนวนไม่เปลี่ยนผลการหารลงตัว

ตรวจจากเลขโดด

ตัวหาร	เกณฑ์
2, 5, 10	ตรวจสอบเลขหลักหน่วยว่าเป็นพหุคูณของตัวหารนั้น
4, 8	ตรวจสอบจำนวนที่เกิดจากสองหลักท้าย หรือสามหลักท้าย ตามลำดับ
3, 9	ตรวจสอบผลบวกเลขโดดทั้งหมด
11	ตรวจสอบผลต่างผลบวกเลขโดดในตำแหน่งสลับกัน

- เลขโดดที่ไม่ทราบค่าต้องอยู่ใน $\{0, 1, \dots, 9\}$
- ถ้าเป็นเลขหลักแรกของจำนวนหลายหลัก ต้องไม่เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 5 จงหาเลขโดด d ที่ทำให้ $5d24$ หารด้วย 9 ลงตัว

วิธีคิด ผลบวกเลขโดดเท่ากับ $11 + d$ ต้องเป็นพหุคูณของ 9 เมื่อ $0 \leq d \leq 9$ จึงได้ $11 + d = 18$ และ $d = 7$

ตอบ $d = 7$

1.6 การพิสูจน์และกรณีโต้แย้ง

ข้อความที่กล่าวถึงจำนวนเต็มทุกจำนวนต้องอาศัยเหตุผลทั่วไป

หลักการตรวจสอบข้อความ

พิสูจน์: เขียนตามนิยาม ใช้ผลรวมเชิงเส้น หรือแยกกรณีที่ครอบคลุมทั้งหมด

หักล้าง: ให้กรณีที่เงื่อนไขจริง แต่ข้อสรุปเท็จ

- การทดลองค่าจำนวนจำกัดไม่ใช่ข้อพิสูจน์สำหรับทุกจำนวนเต็ม
- กรณีโต้แย้งต้องตรงเงื่อนไขทุกข้อของข้อความเดิม

ตัวอย่าง 6 จงพิสูจน์ว่า $4 \mid (n^2 - 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

วิธีคิด เขียน $n = 2k + 1$ ได้ $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$ ซึ่งเป็นพหุคูณของ 4

ตอบ $4 \mid (n^2 - 1)$

สรุป

การหารลงตัวต้องมีผลหารเป็นจำนวนเต็ม ขั้นตอนวิธีการหารกำหนดเศษในช่วง $0 \leq r < |b|$ สมบัติผลรวมเชิงเส้นและการแยกคู่ที่ใช้พิสูจน์ข้อความทั่วไป ส่วนกรณีโต้แย้งใช้หักล้างข้ออ้าง

เรื่อง ทฤษฎีจำนวน

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 จงเขียน -84 ในรูป $7k$ และระบุว่า $7 \mid -84$ หรือไม่

ตอบ

ข้อ 2 เมื่อเขียน $-53 = 8q + r$ โดย $0 \leq r < 8$ จงหา q, r

ตอบ

เรื่อง ทฤษฎีจำนวน

ตอนที่ 3 ห.ร.ม. ค.ร.น. และจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

เป้าหมาย ใช้ความหมายและสมบัติของ ห.ร.ม. ค.ร.น. และจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

3.1 นิยาม ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม โดยไม่เป็นศูนย์พร้อมกันสำหรับ ห.ร.ม. และไม่เป็นศูนย์ทั้งสองจำนวนสำหรับ ค.ร.น.

ข้อตกลงที่ใช้ในเอกสาร

$$\gcd(a, b) = \text{ตัวหารร่วมบวกที่มากที่สุดของ } a, b$$

$$\text{lcm}(a, b) = \text{พหุคูณร่วมบวกที่น้อยที่สุดของ } a, b$$

$$\gcd(a, 0) = |a| \quad (a \neq 0)$$

- ใช้ค่าสัมบูรณ์เมื่อจำนวนที่กำหนดเป็นลบ และให้ผลลัพธ์ของ ห.ร.ม. ค.ร.น. เป็นบวก
- ในเอกสารนี้ไม่ใช้ ค.ร.น. กับจำนวนที่เป็นศูนย์
- ตัวหารร่วมทุกตัวหาร ห.ร.ม. ลงตัว และพหุคูณร่วมทุกตัวเป็นพหุคูณของ ค.ร.น.

ตัวอย่าง 13 จงหา ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ $-30, 84$

วิธีคิด ใช้ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ และ $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ ได้ตัวหารร่วมมาก 6 และพหุคูณร่วมน้อย 420

ตอบ 6 และ 420

3.2 การเลือกเลขชี้กำลัง

ให้ $a, b > 0$ เขียนด้วยฐานจำนวนเฉพาะชุดเดียวกันเป็น $a = \prod p_i^{\alpha_i}$ และ $b = \prod p_i^{\beta_i}$ โดยเลขชี้กำลังอาจเป็นศูนย์

ต่ำสุดสำหรับ ห.ร.ม. สูงสุดสำหรับ ค.ร.น.

$$\gcd(a, b) = \prod p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$$

$$\text{lcm}(a, b) = \prod p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

- min หมายถึงค่าต่ำสุด และ max หมายถึงค่าสูงสุดของเลขชี้กำลัง
- สำหรับหลายจำนวน เลือกต่ำสุดหรือสูงสุดรวมทุกจำนวน
- เมื่อเพิ่มกำลังของฐานเฉพาะ ให้เทียบเลขชี้กำลังก่อนและหลัง

ตัวอย่าง 14 จงหา ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ 72, 120

วิธีคิด $72 = 2^3 \cdot 3^2$ และ $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ เลือกต่ำสุดได้ $2^3 \cdot 3 = 24$ เลือกสูงสุดได้ $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

ตอบ 24 และ 360

3.3 เอกลักษณ์ผลคูณและจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นศูนย์ ทั้งสองเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์เมื่อ $\gcd(a, b) = 1$

ความสัมพันธ์ของสองจำนวน

$$\gcd(a, b) \text{ lcm}(a, b) = |ab|$$

$$\gcd(a, b) = 1 \implies \text{lcm}(a, b) = |ab|$$

- จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเฉพาะ เช่น 8, 15
- เอกลักษณ์ผลคูณนี้ใช้ทั่วไปกับสองจำนวน ไม่ขยายเป็นผลคูณสามจำนวน
- โจทย์หาจำนวนที่ไม่ทราบค่าต้องตรวจ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. หลังแก้สมการ

ตัวอย่าง 15 จำนวนเต็มบวก x กับ 45 มี ห.ร.ม. 9 และ ค.ร.น. 135 จงหา x

วิธีคิด ผลคูณให้ $45x = 9(135)$ จึงมี $x = 27$ ตรวจ $\gcd(27, 45) = 9$ และ ค.ร.น. 135

ตอบ $x = 27$

3.4 สมบัติการลดตัวประกอบร่วม

ให้ a, b, c, k เป็นจำนวนเต็ม และนิพจน์ ห.ร.ม. ที่ปรากฏนิยามได้

สมบัติที่ใช้วิเคราะห์เงื่อนไข

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, b + ka)$$

$$\gcd(ka, kb) = |k| \gcd(a, b) \quad (k \neq 0)$$

$$\gcd(a, b) = d \implies \gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

$$\gcd(a, b) = 1, a \mid bc \implies a \mid c$$

$$p \mid ab \implies p \mid a \text{ หรือ } p \mid b \quad (p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ})$$

- การตัดตัวประกอบต้องตรวจสอบความเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์
- จำนวนประกอบทั่วไปไม่มีสมบัติแยกการหารผลคูณแบบจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่าง 16 ให้ $10 \mid a$ และ $\gcd(a, 3) = 1$ จงหา $\gcd(a, 30)$

วิธีคิด a มีตัวประกอบ 2, 5 แต่ไม่มี 3 เมื่อเทียบกับ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ จึงมี ห.ร.ม. 10

ตอบ 10

3.5 คู่อันดับจาก ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

ให้ $x, y > 0$ มี ห.ร.ม. g และ ค.ร.น. L จึงจำเป็นต้องมี $g \mid L$

แยกตัวหารร่วมออก

$$x = gu, \quad y = gv, \quad \gcd(u, v) = 1, \quad uv = \frac{L}{g}$$

- กำลังเต็มของฐานเฉพาะแต่ละฐานใน $\frac{L}{g}$ ต้องอยู่ใน u หรือ v เพียงฝั่งเดียว
- แบ่งฐานเดียวกันไปทั้งสองฝั่งจะทำให้ u, v มีตัวหารร่วม
- ใช้เงื่อนไขผลรวม ผลต่าง ช่วง หรือ $x < y$ เพื่อตัดคู่

ตัวอย่าง 17 ให้ $\gcd(x, y) = 4$, $\text{lcm}(x, y) = 120$, $x < y$ และ $x + y = 44$ จงหา x, y

วิธีคิด ให้ $x = 4u, y = 4v$ ได้ $uv = 30, u + v = 11$ คู่ที่ใช้ได้คือ $(u, v) = (5, 6)$ จึงได้ $(20, 24)$

ตอบ $x = 20, y = 24$

สรุป

ห.ร.ม. เลือกเลขชี้กำลังต่ำสุด ส่วน ค.ร.น. เลือกสูงสุด เอกลักษณ์ผลคูณใช้กับสองจำนวน การตัดตัวประกอบต้องมีเงื่อนไข และการหาจำนวนเริ่มจากแยกตัวหารร่วมแล้วกำหนดให้ส่วนที่เหลือเฉพาะสัมพัทธ์

เรื่อง ทฤษฎีจำนวน

แบบฝึกหัดตอนที่ 3

ง่าย

ข้อ 29 จงหา $\gcd(-24, 60)$ และ $\text{lcm}(-24, 60)$

ตอบ

ข้อ 30 จงหา $\gcd(-45, 0)$

ตอบ