



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง เมทริกซ์

www.mathstandard.com

เรื่อง เมทริกซ์

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง เมทริกซ์ ครอบคลุม สมาชิก และ มิติ การดำเนินการ ดีเทอร์มิแนนต์ เมทริกซ์ผกผัน ระบบสมการเชิงเส้น และการประยุกต์ร่วมกับบทอื่น

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ จำนวนจริง การจัดรูปพีชคณิต สมการ อสมการ การแยกตัวประกอบ และการอ่านพิกัด

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- สมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ มี m แถวและ n หลัก โดย a_{ij} อยู่แถวที่ i หลักที่ j
- A^T คือทรานสโพสของ A และ I_n คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ อาจละดัชนีเมื่อมิติชัดเจน
- $\underline{0}$ คือเมทริกซ์ศูนย์ ส่วน 0 คือจำนวนศูนย์ ต้องแยกความหมายในสมการ เช่น $AB = \underline{0}$ กับ $\det A = 0$
- $\det A$ เป็น จำนวน ดีเทอร์มิแนนต์ ของ เมทริกซ์จัตุรัส สัญลักษณ์ ขีด ตั้ง คร่อม เมทริกซ์ หมายถึง ดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งอาจติดลบได้
- $M_{ij}(A)$ คือไมเนอร์ $C_{ij}(A)$ คือโคแฟกเตอร์ และ $\text{adj } A$ คือเมทริกซ์แอดจอยน์ โดยใช้คำนิยามในเนื้อหา ก่อนเริ่มคำนวณ
- ผลคูณเมทริกซ์ต้องมีมิติสอดคล้องกัน โดยทั่วไป $AB \neq BA$ จึงต้องรักษาลำดับทั้งในการคูณ ทรานสโพส และการใช้ผกผัน
- ใช้ A^{-1} เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มี $\det A \neq 0$ เท่านั้น การมี $\det A = 0$ ในระบบสมการยังไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าไม่มีคำตอบ
- ใน โจทย์ การ แปลง ระบาย ใช้ เวกเตอร์ พิกัด แบบ หลัก และ มุม ที่ ไม่ กำกับ องศา ใช้ หน่วย เรเดียน ความน่าจะเป็นใช้ $P(E)$

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง เมทริกซ์

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 สมาชิกและการดำเนินการของเมทริกซ์	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–20	13
ตอนที่ 2 ดีเทอร์มิแนนต์และเมทริกซ์เอกฐาน	
เนื้อหาและตัวอย่าง	23
แบบฝึกหัดข้อ 21–40	31
ตอนที่ 3 เมทริกซ์ผกผันและสมการเมทริกซ์	
เนื้อหาและตัวอย่าง	41
แบบฝึกหัดข้อ 41–60	50

เรื่อง เมทริกซ์

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 ระบบสมการเชิงเส้น

เนื้อหาและตัวอย่าง	60
แบบฝึกหัดข้อ 61–80	67

ตอนที่ 5 กำลังเมทริกซ์และการประยุกต์ร่วมกับบทอื่น

เนื้อหาและตัวอย่าง	77
แบบฝึกหัดข้อ 81–100	83

ตอนที่ 6 การนับ ความน่าจะเป็น และแนวคิดข้ามบท

เนื้อหาและตัวอย่าง	93
แบบฝึกหัดข้อ 101–120	97
สรุปเนื้อหา เรื่อง เมทริกซ์	107
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	113
เฉลยเฉพาะคำตอบ	125
เฉลยวิธีคิด	133

เรื่อง เมทริกซ์

ตอนที่ 1 สมาชิกและการดำเนินการของเมทริกซ์

เป้าหมาย อ่านมิติและตำแหน่งสมาชิก คำนวณตามนิยาม และรักษาลำดับของการดำเนินการ

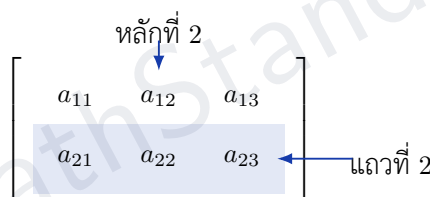
1.1 สมาชิกและมิติ

เมทริกซ์คือการจัดจำนวนเป็นแถวและหลัก ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก สัญลักษณ์ a_{ij} ใช้ดัชนีแถวก่อนดัชนีหลัก โดย $1 \leq i \leq m$ และ $1 \leq j \leq n$

หลักการและสูตร

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

มิติ $m \times n$ หมายถึง m แถว n หลัก ไม่ใช่จำนวนสมาชิกทั้งหมด ซึ่งเท่ากับ mn



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagram description: A 3x3 matrix is shown. The second row is highlighted with a blue background. An arrow points to the second row from the label 'แถวที่ 2' (Row 2). Another arrow points to the third column from the label 'หลักที่ 3' (Column 3). The element a_{23} is at the intersection of row 2 and column 3.

a_{23} อยู่แถวที่ 2 หลักที่ 3

ตัวอย่าง 1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหามิติและ a_{23}

วิธีคิด มี 2 แถว 3 หลัก จึงมีมิติ 2×3 สมาชิกแถวที่ 2 หลักที่ 3 คือ 4

ตอบ มิติ 2×3 และ $a_{23} = 4$

1.2 ชนิดของเมทริกซ์

ชนิดของเมทริกซ์พิจารณาจากมิติ และ ตำแหน่งสมาชิก เมทริกซ์จัตุรัสมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก แนวทแยงหลักประกอบด้วยสมาชิก a_{ii}

หลักการและสูตร

ชนิด	ลักษณะ
เมทริกซ์แถว	มิติ $1 \times n$
เมทริกซ์หลัก	มิติ $m \times 1$
เมทริกซ์จัตุรัส	มิติ $n \times n$
เมทริกซ์ทแยงมุม	จัตุรัสและ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$
เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน	จัตุรัสและ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$
เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง	จัตุรัสและ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i < j$

ตัวอย่าง 2 จงระบุชนิดของ $T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

วิธีคิด สมาชิกใต้แนวทแยงหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด จึงเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนและเป็นเมทริกซ์จัตุรัส แต่ไม่เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเพราะ $t_{12}, t_{13} \neq 0$

ตอบ เมทริกซ์จัตุรัสและเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

1.3 เมทริกซ์ศูนย์และเมทริกซ์เอกลักษณ์

เมทริกซ์ศูนย์มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์และมีได้ทุกมิติ ส่วนเมทริกซ์เอกลักษณ์เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่แนวทแยงหลักเป็นหนึ่งและตำแหน่งอื่นเป็นศูนย์

หลักการและสูตร

$$\underline{0}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

แยก $\underline{0}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ ออกจาก 0 ซึ่งเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $A + \underline{0}_{2 \times 2}$

วิธีคิด บวกสมาชิกศูนย์ที่ละตำแหน่งได้เมทริกซ์เดิม

ตอบ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

1.4 ความเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์เท่ากันเมื่อมีมิติเดียวกันและสมาชิกตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตำแหน่ง เงื่อนไขนี้ให้ระบบสมการของตัวแปรที่ปรากฏ

หลักการและสูตร

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \text{ทุก } i, j$$

ต้องมีมิติของ A และ B เท่ากันก่อนเทียบสมาชิก

ตัวอย่าง 4 ถ้า $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ -1 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา x, y

วิธีคิด ได้ $x+y=7$ และ $x-y=1$ บวกสมการให้ $2x=8$ จึง $x=4$ แล้ว $y=3$

ตอบ $x=4, y=3$

1.5 การบวก ลบ และคูณด้วยสเกลาร์

การบวกและลบทำได้เมื่อมิติเท่ากัน โดยดำเนินการตำแหน่งเดียวกัน สเกลาร์คือจำนวนจริงที่คุณสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์

หลักการและสูตร

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}], \quad A - B = [a_{ij} - b_{ij}], \quad kA = [ka_{ij}]$$

$$k(A + B) = kA + kB, \quad (k + \ell)A = kA + \ell A$$

กำหนด A, B มีมิติเดียวกัน และ $k, \ell \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 5 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา $2A - B$

วิธีคิด คูณสมาชิกทุกตัวของ A ด้วย 2 แล้วลบสมาชิกของ B

$$2A - B = \begin{bmatrix} 2 - 2 & -4 - 1 \\ 6 - (-1) & 0 - 4 \end{bmatrix}$$

ตอบ $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

1.6 ทรานสโพส

ทรานสโพสสลับแถวกับหลัก สมาชิกตำแหน่ง (i, j) ของ A ย้ายไปตำแหน่ง (j, i) ของ A^T ถ้า A มีมิติ $m \times n$ แล้ว A^T มีมิติ $n \times m$

หลักการและสูตร

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}, \quad (A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (kA)^T = kA^T$$

ผลบวกในสูตรต้องมีมิติสอดคล้อง และ $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array} \right] & \xrightarrow{T} & \left[\begin{array}{cc} a & d \\ b & e \\ c & f \end{array} \right] \\ 2 \times 3 & & 3 \times 2 \end{array}$$

ตัวอย่าง 6 จงหาทรานสโพสของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

วิธีคิด แถวแรกและแถวที่สองของ A กลายเป็นหลักแรกและหลักที่สองของ A^T

ตอบ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

1.7 เมทริกซ์สมมาตรและสมมาตรเสมือน

ทั้งสองชนิดต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัส การตรวจใช้สมาชิกคู่ที่สลับดัชนี เมทริกซ์สมมาตรเสมือนที่มีสมาชิกจริง มีแนวทแยงหลักเป็นศูนย์

หลักการและสูตร

$$A^T = A \iff a_{ij} = a_{ji}$$

$$A^T = -A \iff a_{ij} = -a_{ji}, \quad a_{ii} = 0$$

ตัวอย่าง 7 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & x+1 & -3 \\ -4 & 0 & y \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ถ้า $A^T = -A$ จงหา x, y

วิธีคิด จากคู่ตำแหน่ง $(1, 2), (2, 1)$ ได้ $x+1 = 4$ และจาก $(2, 3), (3, 2)$ ได้ $y = -2$ คู่ที่เหลือผ่านเงื่อนไขแล้ว

ตอบ $x = 3, y = -2$

1.8 มิติและนิยามผลคูณ

ผลคูณ AB มีนิยามเมื่อจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B สมาชิกแต่ละตำแหน่งได้จากผลรวมของแถวในตัหน้าคูณหลักในตัหลัง

หลักการและสูตร

$$A_{m \times r} B_{r \times n} = C_{m \times n}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}$$

ตัวแปร k เป็นดัชนีผลรวมจาก 1 ถึง r จำนวนแถวของผลคูณมาจาก A และจำนวนหลักมาจาก B

แถวที่ 2 ของ A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

หลักที่ 1 ของ B

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

ตัวอย่าง 8 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา AB

วิธีคิด มิติ 2×3 คูณ 3×2 ได้ 2×2 คำนวณแต่ละตำแหน่ง

$$AB = \begin{bmatrix} 2 + 2 + 1 & 1 + 0 - 4 \\ 0 + 3 - 2 & 0 + 0 + 8 \end{bmatrix}$$

ตอบ $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

1.9 สมบัติและลำดับการคูณ

การคูณเมทริกซ์เปลี่ยนหมู่และแจกแจงได้เมื่อทุกผลคูณมีมิติสอดคล้อง แต่โดยทั่วไปสลับที่ไม่ได้ การทราวนสโพสผลคูณต้องย้อนลำดับ

หลักการและสูตร

$$(AB)C = A(BC), \quad A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad AI_n = A, \quad I_m A = A \quad (A \text{ มีมิติ } m \times n)$$

แม้ $A, B \neq \underline{0}$ อาจมี $AB = \underline{0}$ ตัวอย่างโต้แย้งคือ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จึงใช้สมบัติผลคูณเป็นศูนย์ของจำนวนจริงโดยตรงไม่ได้

ตัวอย่าง 9 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงเปรียบเทียบ AB กับ BA

วิธีคิด คูณตามลำดับได้ $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จึงไม่เท่ากัน

ตอบ $AB \neq BA$

1.10 กำลังของเมทริกซ์

กำลังจำนวนเต็มไม่ลบใช้กับเมทริกซ์จัตุรัส ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ I มีมิติเดียวกับ A การกระจายกำลังสองต้องเก็บลำดับของพจน์กลาง

หลักการและสูตร

$$A^0 = I, \quad A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ ตัว}}, \quad A^{m+n} = A^m A^n \quad (m, n \geq 0)$$

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

ใช้ $A^2 + 2AB + B^2$ ได้เมื่อ $AB = BA$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 10 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A^2

วิธีคิด คูณแถวกับหลักตามนิยาม

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 0 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

ตอบ $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

สรุป

ตรวจมิติและตำแหน่งก่อนคำนวณ การบวกและลบใช้มิติเดียวกัน การคูณใช้แถวคูณหลักและรักษาลำดับทรานสโพสผลคูณย้อนลำดับ และกำลังสองของผลบวกมีพจน์กลางสองลำดับ

เรื่อง เมทริกซ์

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ จงหามิติของ A และค่า $a_{13} + a_{22}$

ตอบ

ข้อ 2 เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์ เมทริกซ์ทแยงมุม และเมทริกซ์สมมาตรหรือไม่

ตอบ

เรื่อง เมทริกซ์

ตอนที่ 4 ระบบสมการเชิงเส้น

เป้าหมาย เขียนระบบในรูปเมทริกซ์ เลือกวิธีแก้ และจำแนกคำตอบโดยตรวจสอบระบบเดิม

4.1 รูปเมทริกซ์ของระบบ

เรียงตัวแปรตามลำดับเดียวกันทุกสมการ ให้ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ X เป็นเมทริกซ์หลักของตัวแปร และ B เป็นเมทริกซ์หลักค่าคงตัว สัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ไม่ปรากฏเท่ากับศูนย์

หลักการและสูตร

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff AX = B$$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 29 จงเขียนระบบ $2x - y = 3$, $x + 3z = 7$ ในรูปเมทริกซ์ โดยเรียงตัวแปร x, y, z

วิธีคิด เติมสัมประสิทธิ์ศูนย์ของ z ในสมการแรกและของ y ในสมการที่สอง

ตอบ
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

4.2 ระบบที่มีคำตอบชุดเดียวและวิธีผกผัน

เมื่อจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A เป็นจัตุรัส ถ้า $\det A \neq 0$ จะมีคำตอบชุดเดียวสำหรับทุกหลักค่าคงตัว B

หลักการและสูตร

$$AX = B \implies X = A^{-1}B \quad (\det A \neq 0)$$

การคูณเป็น $A^{-1}B$ ไม่ใช่ BA^{-1} ซึ่งอาจไม่มีนิยามด้วยซ้ำ

ตัวอย่าง 30 จงแก้ระบบ $2x + y = 5, 3x + 2y = 8$ โดยใช้ผกผัน

วิธีคิด ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ ได้ $\det A = 1$ และ

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แทนกลับได้ทั้งสองสมการ

ตอบ $x = 2, y = 1$

4.3 หลักเกณฑ์คราเมอร์

ให้ระบบจัตุรัส $AX = B$ มี $\det A \neq 0$ สร้าง A_k โดยแทนหลักที่ k ของ A ด้วย B ส่วนหลักอื่นคงเดิม สูตรนี้ใช้หาตัวแปรบางตัวได้โดยไม่ต้องหาผกผันทั้งหมด

หลักการและสูตร

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A} \quad (k = 1, \dots, n)$$

แทนหลักตามตำแหน่งตัวแปร ไม่ใช่แทนแถว และใช้สูตรไม่ได้เมื่อ $\det A = 0$

$$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] \longrightarrow A_2 = [\mathbf{a}_1 \ B \ \mathbf{a}_3]$$

แทนหลักที่ 2 ด้วยหลักค่าคงตัว B เพื่อหา $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$

ตัวอย่าง 31 จงหา y จากระบบ $x + 2y = 8$, $3x - y = 3$ โดยใช้คราเมอร์

วิธีคิด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ มีดีเทอร์มิแนนต์ -7 แทนหลักที่สองได้ $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ มีดีเทอร์มิแนนต์ -21

ดังนั้น $y = \frac{-21}{-7} = 3$

ตอบ $y = 3$

4.4 เมทริกซ์แต่งเติมและการกำจัดแบบเกาส์

เมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid B]$ รวมสัมประสิทธิ์กับค่าคงตัว การดำเนินการตามแถวที่ย้อนกลับได้รักษาเซตคำตอบ การกำจัดแบบเกาส์ทำให้สมาชิกได้ตัวนำเป็นศูนย์ แล้วแทนย้อนจากแถวล่างขึ้นบน

หลักการและสูตร

$$R_i \leftrightarrow R_j, \quad R_i \leftarrow kR_i \ (k \neq 0), \quad R_i \leftarrow R_i + kR_j \ (i \neq j)$$

ทุกการดำเนินการต้องทำครบทั้งแถว รวมหลักค่าคงตัว

ตัวอย่าง 32 จงแก้ระบบ $x + y + z = 6$, $2x + 3y + z = 11$, $x + 2y + 3z = 14$

วิธีคิด เริ่มจาก

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array} \right]$$

ใช้ $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ และ $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$ ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

ใช้ $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ ได้แถวสุดท้าย $[0 \ 0 \ 3 \mid 9]$ จึง $z = 3$ จากแถวที่สอง $y - z = -1$ ให้ $y = 2$ และแถวแรกให้ $x = 1$

ตอบ $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

4.5 ตัวนำ ตัวแปรอิสระ และชนิดของคำตอบ

ในรูปขั้นบันได ตัวนำ คือสมาชิกไม่เป็นศูนย์ตัวแรกของแถวที่ไม่เป็นแถวศูนย์ หลักที่ไม่มีตัวนำให้ตัวแปรอิสระ เกาส์-จอร์แดนทำให้ตัวนำเป็นหนึ่งและสมาชิกอื่นในหลักตัวนำเป็นศูนย์

หลักการและสูตร

หลังลดแถว	ชนิดของคำตอบ
มีแถว $[0 \cdots 0 \mid c], c \neq 0$	ไม่มีคำตอบ
ไม่มีแถวขัดแย้ง และทุกตัวแปรเป็นตัวนำ	คำตอบชุดเดียว
ไม่มีแถวขัดแย้ง และมีตัวแปรอิสระ	คำตอบอนันต์



ชุดเดียว



ไม่มีคำตอบ



คำตอบอนันต์

ภาพแสดงกรณีสมการเชิงเส้นสองตัวแปรสองสมการ

ตัวอย่าง 33 จงเขียนคำตอบทั้งหมดของระบบ $x + y + z = 4, 2x + 2y + 2z = 8, y - z = 2$

วิธีคิด สมการที่สองเป็นสองเท่าของสมการแรก จึงไม่เพิ่มเงื่อนไข กำหนด $z = t \in \mathbb{R}$ จากสมการที่สามได้ $y = 2 + t$ แล้วสมการแรกให้ $x = 2 - 2t$

ตอบ $(x, y, z) = (2 - 2t, 2 + t, t)$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$

4.6 ระบบที่มีพารามิเตอร์

หากตัวนำขึ้นกับพารามิเตอร์ ต้องแยกกรณีตัวนำเป็นศูนย์ก่อนหาร สมมติหลังลดแถวได้ $pu = q$ โดย p, q ขึ้นกับพารามิเตอร์ และ u เป็นตัวแปรที่กำลังพิจารณา

หลักการและสูตร

$$p \neq 0 \implies u = \frac{q}{p}$$

$$p = 0, q \neq 0 \implies \text{แถวขัดแย้ง}, \quad p = q = 0 \implies \text{แถวนี้ไม่เพิ่มเงื่อนไข}$$

ยังต้องตรวจแถวอื่นทั้งหมดก่อนสรุปว่ามีคำตอบบนันต์

ตัวอย่าง 34 จ्ञาแนกคำตอบของระบบ $x + y = 3, 2x + ay = b$ ตามค่า a, b

วิธีคิด ลบสองเท่าของสมการแรกจากสมการที่สอง ได้ $(a - 2)y = b - 6$ ถ้า $a \neq 2$ มีคำตอบเดียว โดย $y = \frac{b - 6}{a - 2}$ และ $x = 3 - y$ ถ้า $a = 2, b = 6$ มีคำตอบบนันต์ หาก $a = 2, b \neq 6$ ไม่มีคำตอบ

ตอบ ชุดเดียวเมื่อ $a \neq 2$ บนันต์เมื่อ $(a, b) = (2, 6)$ และไม่มีคำตอบเมื่อ $a = 2, b \neq 6$

4.7 การเปลี่ยนเป็นระบบเชิงเส้น

ส่วนกลับ กรณธ์ หรือค่าฟังก์ชันบางรูปสามารถใช้เป็นตัวแปรใหม่ได้ ต้องระบุความหมายและช่วงค่าของตัวแปรใหม่ก่อนแก้ และแปลงกลับสู่ตัวแปรเดิม

หลักการและสูตร

$$u = \frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{u} \quad (x, u \neq 0)$$

$$v = \sqrt{y} \implies y = v^2 \quad (y \geq 0, v \geq 0)$$

ตัวอย่าง 35 จ्ञแก้ระบบ $\frac{1}{x} + \sqrt{y} = 5, \frac{2}{x} - \sqrt{y} = 1$ โดย $x \neq 0, y \geq 0$

วิธีคิด ให้ $u = \frac{1}{x} \neq 0, v = \sqrt{y} \geq 0$ ได้ $u + v = 5, 2u - v = 1$ บวกสมการให้ $3u = 6$ จึง $u = 2, v = 3$ ย้อนกลับได้ $x = \frac{1}{2}, y = 9$ และแทนกลับผ่านทั้งสองสมการ

ตอบ $x = \frac{1}{2}, y = 9$

4.8 แบบจำลองจากสถานการณ์

กำหนดตัวแปรพร้อมหน่วย แล้วสร้างสมการจากปริมาณรวม คงลำดับตัวแปรเดิมทุกสมการ เมื่อได้คำตอบ ต้องตรวจสอบข้อจำกัด เช่น ราคาเป็นบวก จำนวนสิ่งของเป็นจำนวนเต็ม หรือปริมาณไม่เป็นลบ

หลักการและสูตร

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2$$

a_i, b_i เป็นสัมประสิทธิ์ของปริมาณแต่ละชนิด และ c_i เป็นปริมาณรวมตามเงื่อนไขที่ i

ตัวอย่าง 36 ร้านขายสมุดและปากกา สมุด 2 เล่มกับปากกา 3 ด้ามราคา 110 บาท ส่วนสมุด 3 เล่มกับปากกา 2 ด้ามราคา 140 บาท จงหาราคาต่อหน่วย

วิธีคิด ให้ x เป็น ราคา สมุด หนึ่ง เล่ม และ y เป็น ราคา ปากกา หนึ่ง ด้าม หน่วย บาท ได้ $2x + 3y = 110, 3x + 2y = 140$ คูณสมการแรกด้วย 3 และสมการที่สองด้วย 2 แล้วลบ ได้ $5y = 50$ จึง $y = 10, x = 40$

ตอบ สมุดเล่มละ 40 บาท ปากกาด้ามละ 10 บาท

สรุป

ระบบเชิงเส้นต้องคงลำดับตัวแปร การลดแถวต้องทำรวมหลักค่าคงตัว ระบบจัตุรัสมี $\det A \neq 0$ จึงใช้ผกผันหรือคราเมอร์ได้ เมื่อตีเทอร์มินันต์เป็นศูนย์ให้ตรวจแถวขัดแย้งและตัวแปรอิสระต่อ

เรื่อง เมทริกซ์

แบบฝึกหัดตอนที่ 4

ง่าย

ข้อ 61 จงเขียนระบบ $2x - y = 4$, $x + 3y = 9$ ในรูป $AX = B$ โดยใช้ $X = [x \ y]^T$

ตอบ

ข้อ 62 จงแก้ระบบ $AX = B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ X เรียงตัวแปร $[x \ y]^T$

ตอบ