



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง ตรรกศาสตร์

www.mathstandard.com

เรื่อง ตรรกศาสตร์

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.3

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง ตรรกศาสตร์ ครอบคลุมประพจน์ ตัวเชื่อม ค่าความจริง ความสมมูล นิเสธ สัจนิรันดร์ ประโยคเปิด ตัวบ่งปริมาณ และความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผล

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ จำนวนจริง สมการ อสมการ และสัญลักษณ์ของเซต

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- T แทนค่าจริง และ F แทนค่าเท็จ ส่วน p, q, r, s แทนประพจน์
- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ แทนนิเสธ และ หรือ ถ้า-แล้ว และก็ต่อเมื่อ ตามลำดับ คำว่า “หรือ” รวมกรณีจริงทั้งคู่ เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น
- $\equiv$ แทนความสมมูลทุกการกำหนดค่าความจริง ไม่ใช่ตัวเชื่อมภายในประพจน์
- $P(x)$ แทนประโยคเปิด U แทนเอกภพสัมพัทธ์ ส่วน $\forall$ และ $\exists$ แทนสำหรับทุกตัวและมีอย่างน้อยหนึ่งตัว
- เอกภพของตัวบ่งปริมาณไม่เป็นเซตว่าง เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น ทุกนิพจน์ต้องนิยามได้ในเอกภพนั้น
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ไม่รวมศูนย์ และ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A ตัวแปรใหม่ในโจทย์ แต่ละข้ออ้างอิงเฉพาะข้อนั้น

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ตรรกศาสตร์

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 ประพจน์และภาษา	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–12	8
ตอนที่ 2 ค่าความจริงและเงื่อนไข	
เนื้อหาและตัวอย่าง	15
แบบฝึกหัดข้อ 13–26	19
ตอนที่ 3 สมมูลและนิเสธ	
เนื้อหาและตัวอย่าง	27
แบบฝึกหัดข้อ 27–46	32
ตอนที่ 4 สัจนิรันดร์และตัวเชื่อมที่กำหนดใหม่	
เนื้อหาและตัวอย่าง	43
แบบฝึกหัดข้อ 47–66	46

เรื่อง ตรรกศาสตร์

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ

เนื้อหาและตัวอย่าง	57
แบบฝึกหัดข้อ 67–80	62

ตอนที่ 6 การให้เหตุผล

เนื้อหาและตัวอย่าง	70
แบบฝึกหัดข้อ 81–98	75

ตอนที่ 7 การประยุกต์ร่วมกับคณิตศาสตร์

เนื้อหาและตัวอย่าง	85
แบบฝึกหัดข้อ 99–112	89
สรุปเนื้อหา เรื่อง ตรรกศาสตร์	97
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	103
เฉลยเฉพาะคำตอบ	116
เฉลยวิธีคิด	123

เรื่อง ตรรกศาสตร์

ตอนที่ 1 ประพจน์และภาษา

เป้าหมาย จำแนกประพจน์ อธิบายตัวเชื่อม และเขียนข้อความที่มีเงื่อนไขจำเป็นหรือเงื่อนไขเพียงพอเป็นสัญลักษณ์

1.1 ประพจน์และค่าความจริง

ประพจน์ คือข้อความบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีค่าความจริงแน่นอนอย่างใดอย่างหนึ่ง คือจริง T หรือเท็จ F

ลักษณะ	ตัวอย่าง	การพิจารณา
ข้อความจริง	$4 + 5 = 9$	เป็นประพจน์จริง
ข้อความเท็จ	$4 + 5 = 10$	เป็นประพจน์เท็จ
คำสั่ง	จงตรวจสอบการ	ไม่ได้ยืนยันค่าความจริง
คำถาม	คำตอบเท่าใด	ไม่เป็นประพจน์
ตัวแปรยังอิสระ	$x + 2 = 7$	เป็นประโยคเปิด
ความคิดเห็นที่ไม่มีเกณฑ์แน่นอน	รูปนี้สวยที่สุด	ยังไม่มีเกณฑ์ตัดสินแน่นอน

- ข้อความเท็จยังเป็นประพจน์ แม้ผู้พิจารณายังไม่ทราบข้อเท็จจริง
- คำสั่ง คำถาม และความคิดเห็นที่ไม่มีเกณฑ์แน่นอนไม่เป็นประพจน์
- ข้อความที่อ้างบุคคล เวลา หรือสถานที่ ต้องระบุบริบทก่อนตัดสิน

ตัวอย่าง 1 ข้อความ “15 เป็นจำนวนเฉพาะ” เป็นประพจน์หรือไม่ และมีค่าความจริงใด

วิธีคิด ข้อความยืนยันสมบัติของจำนวนที่กำหนดแน่นอน จึงเป็นประพจน์ แต่ $15 = 3 \times 5$ มีตัวหารบวกเกินสองตัว

ตอบ เป็นประพจน์เท็จ

1.2 นิเสธและตัวเชื่อมพื้นฐาน

ให้ p, q แทนประพจน์ นิเสธ $\neg p$ มีค่าความจริงตรงข้ามกับ p เสมอ

ความหมายของตัวเชื่อม

รูปประพจน์	เงื่อนไขที่เป็นจริง
$p \wedge q$	p และ q จริงทั้งคู่
$p \vee q$	อย่างน้อยหนึ่งข้อความจริง รวมกรณีจริงทั้งคู่
$p \rightarrow q$	ทุกกรณียกเว้นเหตุ p จริงและผล q เท็จ
$p \leftrightarrow q$	ทั้งสองข้อความมีค่าความจริงตรงกัน

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

- การหา นิเสธต้องครอบคลุมข้อความเดิมทั้งหมด มิใช่เพียงเติมคำว่า “ไม่”
- “หรือ” ในตรรกศาสตร์รวมกรณีจริงทั้งคู่ หากต้องการเพียงหนึ่งประพจน์ต้องระบุเพิ่ม

ตัวอย่าง 2 ให้ p แทน “4 เป็นจำนวนคู่” และ q แทน “ $4 > 9$ ” จงหาค่าของ $\neg p$, $p \wedge q$ และ $p \vee q$

วิธีคิด ได้ $p = T, q = F$ ดังนั้นนิเสธของ p เป็น F และให้ $T \wedge F = F$ ขณะที่ $T \vee F = T$

ตอบ F, F, T ตามลำดับ

1.3 เงื่อนไขถ้า-แล้ว

ใน $p \rightarrow q$ เรียก p ว่าเหตุ และ q ว่าผล

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- เท็จเฉพาะกรณีเหตุจริงและผลเท็จ เมื่อเหตุเท็จ ประพจน์เงื่อนไขเป็นจริง
- $p \rightarrow q$ ไม่ได้ยืนยันว่า p เป็นจริง
- ตัวเชื่อมนี้อธิบายค่าความจริง มิได้ยืนยันลำดับเวลาหรือความเป็นสาเหตุ

ตัวอย่าง 3 จงพิจารณา “ถ้า $5 < 2$ แล้ว 10 เป็นจำนวนคี่”

วิธีคิด เหตุ $5 < 2$ เป็นเท็จ และผลเป็นเท็จ ตามตารางค่าความจริง $F \rightarrow F$ ให้ค่าจริง ประพจน์รวมจึงเป็นจริง

ตอบ เป็นประพจน์จริง

1.4 ก็ต่อเมื่อและการแยกความหมายของภาษา

$p \leftrightarrow q$ ต้องเป็นจริงทั้งสองทิศทาง คือ $p \rightarrow q$ และ $q \rightarrow p$

ข้อความ	รูปสัญลักษณ์
p เมื่อ q	$q \rightarrow p$
p เฉพาะเมื่อ q	$p \rightarrow q$
p ก็ต่อเมื่อ q	$p \leftrightarrow q$
p แต่ไม่ q	$p \wedge \neg q$
p หรือ q อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

- ก็ต่อเมื่อเป็นจริงเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าตรงกัน
- คำว่า “แต่” มีค่าความจริงเช่นเดียวกับ “และ”
- ตรวจสอบทิศของคำว่า “เมื่อ” และ “เฉพาะเมื่อ” ให้ตรงกับข้อความ

ตัวอย่าง 4 ให้ p แทน “มีเอกสาร” และ q แทน “ได้รับสิทธิ์” จงเขียน “ได้รับสิทธิ์เมื่อมีเอกสาร” และ “ได้รับสิทธิ์เฉพาะเมื่อมีเอกสาร”

วิธีคิด ข้อความแรกใช้มีเอกสารเป็นเหตุจึงได้ $p \rightarrow q$ ข้อความที่สองยืนยันว่าผู้ได้รับสิทธิ์ต้องมีเอกสาร จึงได้ $q \rightarrow p$

ตอบ $p \rightarrow q$ และ $q \rightarrow p$ ตามลำดับ

1.5 เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอ

เมื่อ $p \rightarrow q$ เป็นจริง การเกิด p รับรองการเกิด q ส่วนการเกิด p ต้องมี q เป็นจริงด้วย

ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอ

$$p \rightarrow q \iff \begin{cases} p \text{ เพียงพอสำหรับ } q \\ q \text{ จำเป็นสำหรับ } p \end{cases}$$

ทั้งสองทิศเป็นจริง: $p \leftrightarrow q$

- เงื่อนไขจำเป็นไม่เป็นเงื่อนไขเพียงพอโดยอัตโนมัติ
- หากเป็นจริงทั้งสองทิศ จะเป็นเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอ

ตัวอย่าง 5 สำหรับจำนวนเต็ม n พิจารณา “ถ้า n หารด้วย 8 ลงตัว แล้ว n หารด้วย 4 ลงตัว” จงระบุเงื่อนไขทั้งสองชนิด

วิธีคิด เขียน $n = 8k = 4(2k)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$ จึงสรุปได้ว่าการหารด้วย 8 ลงตัวรับรองการหารด้วย 4 ลงตัว แต่ $n = 4$ แสดงว่าทิศย้อนกลับไม่จริงเสมอ

ตอบ หารด้วย 8 ลงตัวเป็นเงื่อนไขเพียงพอ และหารด้วย 4 ลงตัวเป็นเงื่อนไขจำเป็น

1.6 การกำหนดขอบเขตและวงเล็บ

ประเด็นสำคัญ

การแปลข้อความต้องกำหนดประพจน์ย่อยและขอบเขตตัวเชื่อมให้ชัดเจน

- กำหนดสัญลักษณ์ให้ข้อความย่อยที่สมบูรณ์
- หาตัวเชื่อมหลักที่เชื่อมส่วนใหญ่ที่สุด
- ใช้วงเล็บแยกกลุ่มก่อนคำนวณค่าความจริง

ตัวอย่าง 6 ให้ p แทนมีบัตร q แทนทราบรหัส และ r แทนเจ้าหน้าที่อนุญาต จงเขียน “ถ้ามีบัตรหรือทราบรหัส แล้วเจ้าหน้าที่อนุญาต”

วิธีคิด ตัวเชื่อมหลักคือถ้า-แล้ว เหตุประกอบด้วยหรือ จึงรวม $p \vee q$ ไว้ในวงเล็บก่อนเชื่อมกับผล r

ตอบ $(p \vee q) \rightarrow r$

สรุป

ประพจน์มีค่าจริงหรือเท็จตามบริบทที่กำหนด ตัวเชื่อมแต่ละชนิดมีนิยามค่าความจริงเฉพาะ การแปลข้อความเป็นสัญลักษณ์ต้องระบุทิศของเงื่อนไขและขอบเขตของตัวเชื่อมให้ถูกต้อง

เรื่อง ตรรกศาสตร์

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 พิจารณาว่าข้อความใดเป็นประพจน์

ก $8 - 3 = 6$

ข จงตรวจสอบคำตอบ

ค $x + 1 = 4$ โดยยังไม่กำหนด x

ง $\emptyset \subseteq \{2\}$

ตอบ

ข้อ 2 ให้ p แทน “11 เป็นจำนวนเฉพาะ” จงหาค่าความจริงของ p และ $\neg p$

ตอบ

เรื่อง ตรรกศาสตร์

ตอนที่ 2 ค่าความจริงและเงื่อนไข

เป้าหมาย สร้างตารางค่าความจริง และหาค่าประพจน์ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

2.1 การแจกแจงค่าของประพจน์ย่อย

ประพจน์ย่อยอิสระ n ตัว มีการกำหนดค่าความจริงครบทั้งหมด 2^n แถว

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

- อิสระในที่นี้หมายถึงไม่มีเงื่อนไขจำกัดค่า มิใช่ความเป็นอิสระทางความน่าจะเป็น
- เพิ่มคอลัมน์ย่อยตามลำดับการคำนวณ โดยใช้ตารางตัวเชื่อมในหัวข้อ 1.2
- เมื่อมีเงื่อนไขกำกับ ให้คิดเฉพาะแถวที่สอดคล้องก่อนหาข้อสรุป

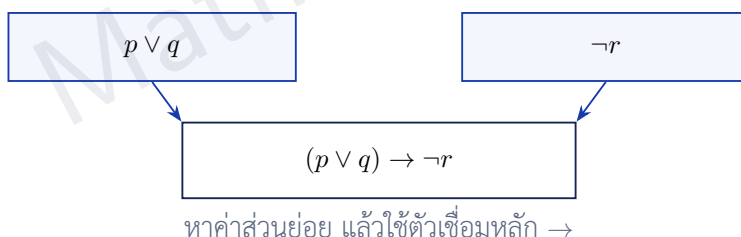
ตัวอย่าง 7 ให้ p, q, r เป็นประพจน์อิสระ จงหาจำนวนแถวทั้งหมด และจำนวนแถวที่ $q = T$

วิธีคิด ประพจน์อิสระสามตัวให้ $2^3 = 8$ แถว เมื่อกำหนด q แล้ว p, r ยังคงมีค่าที่เลือกได้อิสระ จึงมี $2^2 = 4$ แถว

ตอบ 8 แถว และ 4 แถว

2.2 คำนวนจากวงเล็บชั้นใน

คำนวณประพจน์ผสมจากส่วนย่อยไปสู่ตัวเชื่อมหลัก



- เริ่มจากวงเล็บชั้นใน แล้วใช้ผลที่ได้คำนวณชั้นถัดไป
- แยกคอลัมน์สำหรับแต่ละส่วน เพื่อป้องกันการสับสนขอบเขต

ตัวอย่าง 8 สร้างตารางค่าความจริงของ $(p \vee q) \rightarrow \neg p$

วิธีคิด คำนวณ $p \vee q$ และ $\neg p$ ก่อน แล้วอ่านอิมพลีเคชันตามแต่ละแถว

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	ประพจน์รวม
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

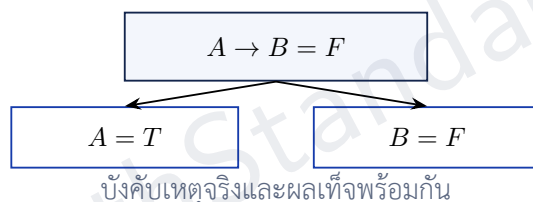
ตอบ F, F, T, T ตามลำดับแถว

2.3 การย้อนจากค่าของตัวเชื่อม

ค่าของตัวเชื่อมบางกรณีกำหนดค่าประพจน์ย่อยได้แน่นอน แต่บางกรณีบอกได้เพียงความสัมพันธ์

ข้อสรุปจากค่าความจริงที่กำหนด

เงื่อนไข	ผลที่จำเป็น
$p \wedge q = T$	$p = T, q = T$
$p \vee q = F$	$p = F, q = F$
$p \rightarrow q = F$	$p = T, q = F$
$p \leftrightarrow q = T$	มีค่าตรงกัน แต่ยังระบุไม่ได้ว่าเป็น T หรือ F
$p \leftrightarrow q = F$	มีค่าต่างกัน แต่ยังระบุค่าของแต่ละประพจน์ไม่ได้



- $p \wedge q = F$ ให้เพียงว่าอย่างน้อยหนึ่งประพจน์เท็จ
- $p \vee q = T$ ให้เพียงว่าอย่างน้อยหนึ่งประพจน์จริง มิใช่จริงทั้งคู่

ตัวอย่าง 9 กำหนด $(p \vee q) \rightarrow r = F$ จงหาคู่ค่าของ (p, q) ที่เป็นไปได้

วิธีคิด เหตุ $p \vee q$ ต้องจริง และผล r เท็จ ตัวเชื่อม “หรือ” เป็นจริงเมื่อมีประพจน์ย่อยอย่างน้อยหนึ่งประพจน์เป็นจริง จึงมีคู่ค่าที่เป็นไปได้สามคู่

ตอบ $(p, q) = (T, T), (T, F), (F, T)$ และ $r = F$

2.4 การใช้เงื่อนไขหลายข้อร่วมกัน

ประเด็นสำคัญ

ทุกคำตอบต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดพร้อมกัน

- เริ่มจากเงื่อนไขที่บังคับค่าได้แน่นอน เช่น อิมพลีเคชันเท็จ
- แทนค่าที่ทราบลงในเงื่อนไขที่เหลือ แล้วพิจารณากรณีที่ยังเป็นไปได้
- ถ้าไม่มีแถวที่สอดคล้อง แสดงว่าเงื่อนไขขัดแย้งกัน

ตัวอย่าง 10 กำหนด $p \rightarrow q = F$ และ $q \vee r = T$ จงหาค่าของ p, q, r

วิธีคิด เงื่อนไขแรกบังคับ $p = T, q = F$ แทนในเงื่อนไขที่สองได้ $F \vee r = T$ จึงต้องมี $r = T$

ตอบ $p = T, q = F, r = T$

2.5 ค่าที่แน่นอนกับค่าที่ขึ้นกับกรณี

ประเด็นสำคัญ

พิจารณาค่าของข้อความที่ถามเฉพาะแถวซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

- ค่าตรงกันทุกแถว: สรุปค่าความจริงได้แน่นอน แม้บางตัวแปรยังไม่แน่นอน
- มีทั้ง T และ F : ยังสรุปค่าเดียวไม่ได้
- ไม่มีแถวที่สอดคล้อง: เงื่อนไขขัดแย้งกัน ไม่ใช่กรณีค่าที่แน่นอน

ตัวอย่าง 11 กำหนด $p \vee q = T$ จงพิจารณาว่า $p \wedge q$ มีค่าแน่นอนหรือไม่

วิธีคิด คู่ค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขคือ $(T, T), (T, F), (F, T)$ คู่แรกทำให้ประพจน์เป็นจริง ส่วนอีกสองคู่ทำให้เป็นเท็จ เงื่อนไขจึงไม่กำหนดค่าความจริงของประพจน์นี้ได้แน่นอน

ตอบ ยังระบุค่าเดียวไม่ได้

2.6 เงื่อนไขซ้อนและการตรวจกลับ

ประเด็นสำคัญ

อิมพลีเคชันซ้อนที่เป็นเท็จต้องมีเหตุจริงและผลเท็จในชั้นนอกก่อน

- กำหนดค่าของเหตุและผล แล้วตรวจตัวเชื่อมชั้นในตามลำดับ
- พิจารณาค่าที่เป็นไปได้ให้ครบ แล้วแทนกลับในประพจน์เดิม

ตัวอย่าง 12 กำหนด $p \rightarrow (q \rightarrow r) = F$ จงหา p, q, r และค่าของ $(p \wedge q) \rightarrow r$

วิธีคิด ชั้นนอกให้ $p = T$ และ $q \rightarrow r = F$ ชั้นในให้ $q = T, r = F$ ดังนั้น $(p \wedge q) \rightarrow r = T \rightarrow F = F$
ตรวจกลับแล้วประพจน์รวมเดิมเป็น $T \rightarrow F = F$ เช่นกัน

ตอบ $p = T, q = T, r = F$ และค่าที่ถามเป็น F

สรุป

ตารางค่าความจริงต้องครอบคลุมการกำหนดค่าของประพจน์อิสระทุกกรณี คำนวณตามลำดับวงเล็บ แล้วพิจารณาเฉพาะแถวที่สอดคล้องกับเงื่อนไข ค่าประพจน์จะกำหนดได้แน่นอนเมื่อมีค่าตรงกันในทุกแถวดังกล่าว

เรื่อง ตรรกศาสตร์

แบบฝึกหัดตอนที่ 2

ง่าย

ข้อ 13 ให้ $p = F, q = T, r = T$ จงหาค่าของ $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

ตอบ

ข้อ 14 ให้ $p = T, q = F$ จงหาค่าของ $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

ตอบ