



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง กำหนดการแข่งเส้น

www.mathstandard.com

เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น ครอบคลุม การสร้างแบบจำลอง การเขียนกราฟ อสมการ บริเวณที่เป็นไปได้ การหาจุดมุมและค่าที่เหมาะสมที่สุด การแก้ปัญหาสถานการณ์ จำนวนเต็ม ตัวแปรแบบผสม และพารามิเตอร์

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ สมการ อสมการ เส้นตรง ระบบพิกัด พื้นที่ และสมการกำลังสอง

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ผีวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- x, y เป็นตัวแปรตัดสินใจ ความหมาย หน่วย และโดเมนกำหนดเป็นรายชื่อ ไม่ถือว่าต้องไม่ติดลบหาก โจทย์ไม่ได้ระบุหรือไม่มีเหตุผลจากสถานการณ์
- P ใช้แทนฟังก์ชันกำไรหรือฟังก์ชันจุดประสงค์ ส่วน C ใช้แทนต้นทุนตามบริบท ค่าเหมาะสมที่สุดต้อง รายงานแยกจากพิกัดที่ให้ค่านั้น
- $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\geq 0}$ แทนจำนวนจริง จำนวนเต็ม และจำนวนเต็มไม่ลบตามลำดับ
- เส้นที่บวรวมจุดบนเส้นขอบ เส้นประไม่รวมจุดบนเส้นขอบ กราฟพิกัดใช้มาตราส่วนเดียวกันทั้งสองแกน
- จุดมุมต้องผ่านข้อจำกัดทุกข้อ จุดตัดของเส้นขอบที่ไม่ผ่านไม่เป็นจุดของบริเวณที่เป็นไปได้
- การใช้ทฤษฎีจุดมุมกับรูปหลายเหลี่ยมปิดมีขอบเขต ไม่ได้แปลว่าคำตอบมีได้เฉพาะจุดมุม กรณีไม่มี ขอบเขตหรือมีอสมการเข้มต้องตรวจสอบเพิ่มเติม
- ตัวแปรจำนวนเต็มต้องตรวจสอบที่ผ่านจริง ไม่ใช้การปัดโดยไม่ตรวจสอบ ส่วนตัวแปรแบบผสมให้คงชนิด ของตัวแปรแต่ละตัวตามโจทย์
- คำตอบที่เป็นเศษส่วนให้คงค่าแน่นอนระหว่างจำนวน เมื่อรายงานผลให้ใช้หน่วยและเงื่อนไขการปัด ตามที่กำหนด

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 แบบจำลองและอสมการเชิงเส้น	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–20	10
ตอนที่ 2 บริเวณที่เป็นไปได้และเรขาคณิตของคำตอบ	
เนื้อหาและตัวอย่าง	20
แบบฝึกหัดข้อ 21–40	26
ตอนที่ 3 การหาค่าเหมาะที่สุดและกรณีพิเศษ	
เนื้อหาและตัวอย่าง	36
แบบฝึกหัดข้อ 41–60	42

เรื่อง กำหนดการแข่งเส้น

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 การสร้างแบบจำลองจากสถานการณ์

เนื้อหาและตัวอย่าง	52
แบบฝึกหัดข้อ 61–80	60

ตอนที่ 5 จำนวนเต็ม ตัวแปรแบบผสม และการยืนยันแผน

เนื้อหาและตัวอย่าง	70
แบบฝึกหัดข้อ 81–100	77

ตอนที่ 6 พารามิเตอร์และโจทย์วิเคราะห์

เนื้อหาและตัวอย่าง	87
แบบฝึกหัดข้อ 101–120	92
สรุปเนื้อหา เรื่อง กำหนดการแข่งเส้น	102
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	105
เฉลยเฉพาะคำตอบ	117
เฉลยวิธีคิด	124

เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

ตอนที่ 1 แบบจำลองและอสมการเชิงเส้น

เป้าหมาย กำหนดตัวแปร แปลข้อจำกัด และเขียนครึ่งระนาบได้ โดยใช้พื้นฐานสมการและอสมการ

1.1 องค์ประกอบของปัญหา

กำหนดการเชิงเส้นเป็นการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเชิงเส้น ภายใต้ข้อจำกัดเชิงเส้นและโดเมนของตัวแปรที่กำหนด

แบบจำลองสองตัวแปร

หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของ $P = ax + by + c$

$$a_ix + b_iy \leq d_i, \quad a_jx + b_jy \geq d_j$$

x, y เป็นตัวแปรตัดสินใจ a, b, c, a_i, b_i, d_i เป็นค่าคงตัว ฟังก์ชันจุดประสงค์อาจแทนกำไร ต้นทุน ระยะเวลา หรือปริมาณอื่นตามโจทย์ ต้องระบุความหมายและหน่วยแยกกัน

ตัวอย่าง 1 ผลิตชุดเล็ก x ชุดและชุดใหญ่ y ชุด กำไรชุดละสามสิบลบาทและสี่สิบลบาทบาท ใช้เครื่องต่อชุดหนึ่งและสองชั่วโมง มีสิบลชั่วโมง จงระบุฟังก์ชันจุดประสงค์และข้อจำกัดเวลา

วิธีคิด กำไรรวมคือกำไรต่อชุดคูณจำนวนชุดแล้วบวก จึง $P = 30x + 45y$ เวลาเครื่องรวม $x + 2y$ ชั่วโมง ต้องไม่เกินสิบล หากชุดแบ่งไม่ได้ให้ $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

ตอบ $P = 30x + 45y, x + 2y \leq 10, x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

1.2 ความเป็นเชิงเส้นและพารามิเตอร์

ตรวจตัวแปรตัดสินใจ

นิพจน์เชิงเส้นใน x, y ไม่มีพจน์ x^2, y^2, xy หรือฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นของตัวแปรทั้งสอง สัมประสิทธิ์อาจขึ้นกับพารามิเตอร์ได้ หากพารามิเตอร์นั้นคงที่ในปัญหา

$$P = (t^2 - 1)x + ty \quad \text{เป็นเชิงเส้นใน } x, y \text{ เมื่อ } t \text{ คงที่}$$

ค่าคงตัวใน ฟังก์ชันจุดประสงค์ เปลี่ยน ค่าที่รายงาน แต่ไม่เปลี่ยน ลำดับ การ เปรียบ เทียบ แผน เมื่อข้อจำกัดเดิม

ตัวอย่าง 2 เปรียบเทียบ $P = 3x + 2y - 5$, $Q = x^2 + y$, $R = t^2x + ty$ เมื่อ t คงที่ นิพจน์ใดเป็นเชิงเส้นในตัวแปรตัดสินใจ

วิธีคิด P มีเพียงพจน์กำลังหนึ่งและค่าคงตัว ส่วน R มี t^2, t เป็นสัมประสิทธิ์คงที่ ทั้งสองจึงเป็นเชิงเส้น แต่ Q มี x^2

ตอบ P, R เป็นเชิงเส้น ส่วน Q ไม่เป็นเชิงเส้น

1.3 โดเมนและเงื่อนไขไม่ติดลบ

เลือกชนิดตัวแปรตามความหมาย

- จำนวนคน จำนวนชิ้น หรือจำนวนวันเต็ม ใช้จำนวนเต็มตามเงื่อนไข
- น้ำหนัก ปริมาตร หรือเวลาที่แบ่งได้ ใช้จำนวนจริงในช่วงที่เป็นไปได้
- อนุญาตไม่ผลิต ใช้ $x \geq 0$ ไม่ใช่ $x > 0$
- “ต้องมีอย่างน้อยหนึ่งชิ้น” ใช้ $x \geq 1$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม

หากโจทย์เป็นปัญหาพิกัดล้วน ไม่เพิ่ม $x, y \geq 0$ โดยไม่มีเงื่อนไขรองรับ บางโจทย์ให้พิกัดติดลบได้

ตัวอย่าง 3 ให้ x เป็นจำนวนผู้โดยสาร y เป็นน้ำหนักสินค้าเป็นกิโลกรัม มีไม่เกินแปดที่นั่ง และอนุญาตให้มีผู้โดยสารหรือสินค้า จระบุโดเมน

วิธีคิด จำนวนคนต้องเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ศูนย์ถึงแปด น้ำหนักสินค้าเป็นจำนวนจริงไม่ลบ ไม่บังคับให้ y เป็นจำนวนเต็ม

ตอบ $x \in \{0, 1, \dots, 8\}$, $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

1.4 แปลงคำเป็นอสมการ

คำสำคัญของข้อจำกัด

ถ้อยคำ	รูปคณิตศาสตร์
ผลรวมไม่เกิน M	$x + y \leq M$
ผลรวมอย่างน้อย L	$x + y \geq L$
ชนิดสองมากกว่าชนิดแรกได้ไม่เกิน d	$y - x \leq d$
ชนิดแรกอย่างน้อย r เท่าของชนิดสอง	$x \geq ry$

M, L, d, r คือค่าคงตัวที่โจทย์กำหนด คำว่า “มากกว่าได้ไม่เกิน” เป็นเพดานผลต่าง ไม่ได้บังคับว่าต้องมากกว่าจริงทุกกรณี

ตัวอย่าง 4 ของเหลวสองชนิดปริมาตร x, y ลิตร ต้องรวมอย่างน้อยหกลิตร และชนิดสองมากกว่าชนิดแรกได้ไม่เกินสองลิตร จงเขียนเงื่อนไข

วิธีคิด แยกข้อกำหนดปริมาตรรวมกับผลต่าง ได้ $x + y \geq 6$ และ $y - x \leq 2$ ร่วมกับ $x, y \geq 0$

ตอบ $x + y \geq 6, y - x \leq 2, x, y \geq 0$

1.5 หน่วยและตารางทรัพยากร

หนึ่งแถวต่อหนึ่งทรัพยากร

$$r_i x + s_i y \leq M_i$$

r_i, s_i คือปริมาณทรัพยากรชนิดที่ i ต่อหน่วยผลิต และ M_i คือปริมาณรวมที่มี หน่วยของทั้งสามพจน์ในแถวต้องเหมือนกัน หากหารด้วยค่าบวกเดียวกัน สามารถย่อทั้งอสมการได้

ตัวอย่าง 5 ผลิตของสองแบบ x, y หน่วย ใช้แป้งหน่วยละสี่ร้อยและสองร้อยกรัม มีแป้งสองจุดสี่กิโลกรัม จงเขียนข้อจำกัดในรูปอย่างง่าย

วิธีคิด เปลี่ยนปริมาณที่มีเป็น 2400 กรัม จึง $400x + 200y \leq 2400$ หารด้วยสองร้อยได้ $2x + y \leq 12$

ตอบ $2x + y \leq 12$

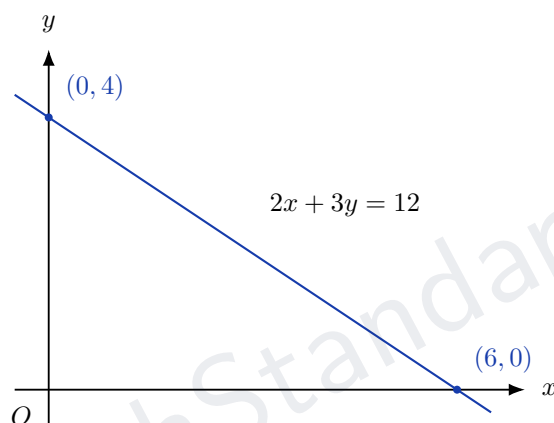
1.6 เส้นตรงและจุดตัดแกน

เส้นขอบ $ax + by = c$ โดย $(a, b) \neq (0, 0)$

$$\left(\frac{c}{a}, 0\right) \quad (a \neq 0), \quad \left(0, \frac{c}{b}\right) \quad (b \neq 0)$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad (b \neq 0)$$

หาก $a = 0$ เป็นเส้นแนวนอน $y = \frac{c}{b}$ หาก $b = 0$ เป็นเส้นแนวตั้ง $x = \frac{c}{a}$ เมื่อ $c = 0$ จุดตัดแกนทั้งสองอาจซ้ำที่จุดกำเนิด ต้องหาจุดอีกจุดเพื่อวาดเส้น



ตัวอย่าง 6 จงหาจุดตัดแกนและความชันของเส้น $2x + 3y = 12$

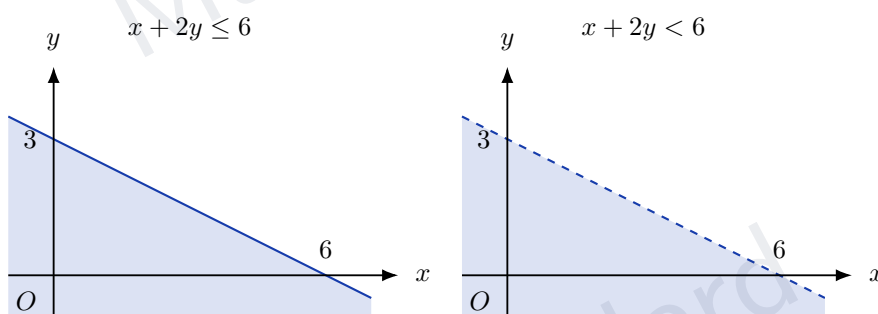
วิธีคิด แทน $y = 0$ ได้ $(6, 0)$ แทน $x = 0$ ได้ $(0, 4)$ จัดรูปเป็น $y = -\left(\frac{2}{3}\right)x + 4$ จึงมีความชัน $-\frac{2}{3}$

ตอบ จุด $(6, 0)$, $(0, 4)$ และความชัน $-\frac{2}{3}$

1.7 ครึ่งระนาบและจุดทดสอบ

เลือกด้านของเส้นขอบ

- เปลี่ยนอสมการเป็นสมการเพื่อวาดเส้นขอบ
- เลือกจุดที่ไม่อยู่บนเส้น หากแทนแล้วจริง เลือกด้านที่มีจุดนั้น
- เครื่องหมาย $\leq, \geq$ รวมเส้นขอบ ใช้เส้นทึบ
- เครื่องหมาย $<, >$ ไม่รวมเส้นขอบ ใช้เส้นประ



ภาพแสดงบางส่วนของครึ่งระนาบ บริเวณจริงแผ่ออกไปเกินกรอบภาพ ไม่ใช่รูปปิดที่ถูกจำกัดด้วยขอบกระดาษ

ตัวอย่าง 7 อธิบายกราฟของ $x + 2y < 6$

วิธีคิด เส้นขอบผ่าน $(6, 0), (0, 3)$ จุดกำเนิดให้ $0 < 6$ จึงเลือกด้านที่มีจุดกำเนิด และใช้เส้นประเพราะไม่รวมจุดบนเส้น

ตอบ ด้านที่มี $(0, 0)$ ของเส้นประ $x + 2y = 6$

1.8 ข้อจำกัดขนานและการตรวจเครื่องหมาย

แถบระหว่างเส้นขนาน

$$L \leq ax + by \leq U, \quad L \leq U$$

หมายถึงผ่านข้อจำกัดล่างและบนพร้อมกัน ถ้า $L > U$ ไม่มีจุดผ่าน หากคูณหรือหารอสมการด้วยจำนวนลบต้องกลับเครื่องหมายทุกครั้ง

ตัวอย่าง 8 เขียนบริเวณ $2 \leq x + 2y \leq 8$ ในรูปช่วงของ y เมื่อทราบ x

วิธีคิด ย้าย x และหารด้วยบวกสอง ได้ $\frac{2-x}{2} \leq y \leq \frac{8-x}{2}$ ทั้งสองเส้นเป็นเส้นทึบ ไม่เพิ่มเงื่อนไขไม่ติดลบหากโจทย์ไม่ได้กำหนด

ตอบ $\frac{2-x}{2} \leq y \leq \frac{8-x}{2}$

สรุป

ระบุความหมาย หน่วย และโดเมนของตัวแปรก่อนสร้างแบบจำลอง แยกฟังก์ชันจุดประสงค์ออกจากข้อจำกัด วาดเส้นขอบก่อนเลือกครึ่งระนาบ และตรวจว่ารวมเส้นขอบหรือไม่

เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 ร้านผลิตชุดเล็ก x ชุด ชุดใหญ่ y ชุด กำไรชุดละ 40, 70 บาทตามลำดับ จงเขียนฟังก์ชันกำไร

ตอบ

ข้อ 2 กำหนด x เป็นจำนวนรถที่จัดได้ อนุญาตให้ไม่จัดรถ จักรเย็บผ้า

ตอบ

เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

ตอนที่ 3 การหาค่าเหมาะที่สุดและกรณีพิเศษ

เป้าหมาย ใช้จุดมุมและเส้นระดับ พร้อมแยกกรณีหลายคำตอบ ไม่มีบริเวณ และไม่มีค่าเหมาะสมได้

3.1 ความนูนและหลักจุดมุม

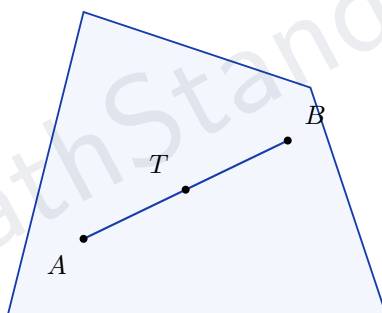
บริเวณที่เกิดจากส่วนร่วมของครึ่งระนาบเป็นบริเวณนูน กล่าวคือส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดในบริเวณยังอยู่ภายในบริเวณทั้งหมด

ค่าเชิงเส้นระหว่างสองจุด

ถ้า A, B อยู่ในบริเวณ และ $0 \leq \lambda \leq 1$ ให้ $T = (1 - \lambda)A + \lambda B$ จะได้

$$P(T) = (1 - \lambda)P(A) + \lambda P(B)$$

หากบริเวณไม่ว่าง เป็นรูปหลายเหลี่ยมปิดที่มีขอบเขต ฟังก์ชันเชิงเส้นมีค่าสูงสุดและต่ำสุด โดยมีจุดมุมอย่างน้อยหนึ่งจุดให้ค่านั้น การกล่าวว่าคำตอบมีได้เฉพาะจุดมุมไม่ถูกต้อง



$$T = (1 - \lambda)A + \lambda B$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

ตัวอย่าง 17 จุด A, B ให้ค่าฟังก์ชันเชิงเส้น $P(A) = 8$, $P(B) = 14$ จงหาค่าที่จุดกึ่งกลาง M และอธิบายว่ามากกว่าสิบสี่ได้หรือไม่

วิธีคิด จุดกึ่งกลางใช้ $\lambda = \frac{1}{2}$ จึง $P(M) = \frac{8 + 14}{2} = 11$ ค่าบนส่วนของเส้นตรงเป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก จึงไม่เกินค่ามากที่สุดของปลายทั้งสอง

ตอบ $P(M) = 11$ และไม่เกินสิบสี่

3.2 ตารางค่าที่จุดมุม

ขั้นตอนหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของรูปปิดมีขอบเขต

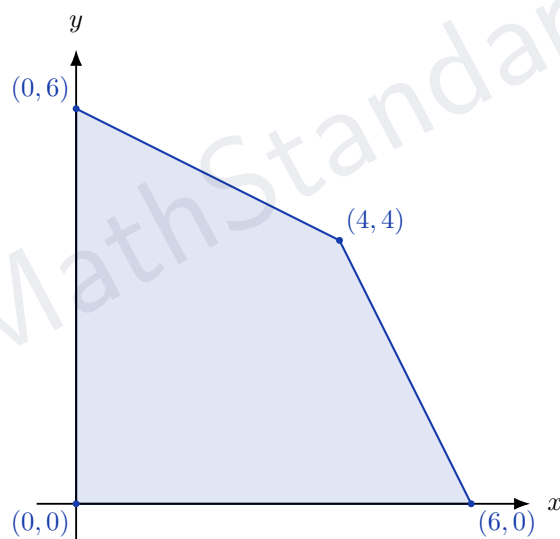
- คัดจุดมุมที่ผ่านทุกข้อจำกัดให้ครบ
- แทนพิกัดแต่ละจุดในฟังก์ชันจุดประสงค์
- เปรียบเทียบค่าสูงสุดหรือต่ำสุดตามคำถาม
- รายงานทั้งพิกัดและค่าที่ได้ พร้อมหน่วย

ตัวอย่าง 18 จงหาค่าสูงสุดของ $P = 3x + 4y$ และพิกัดที่ให้ค่านี้ ภายใต้เงื่อนไข

$$2x + y \leq 12, \quad x + 2y \leq 12$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

โดย x, y เป็นจำนวนจริง



วิธีคิด หาจุดตัดของเส้นขอบและคัดจุดที่ผ่านข้อจำกัดทุกข้อ ได้จุดมุม

$$(0, 0), \quad (6, 0), \quad (4, 4), \quad (0, 6)$$

ค่าฟังก์ชันที่จุดมุมตามลำดับคือ 0, 18, 28, 24 จึงได้ค่าสูงสุด 28

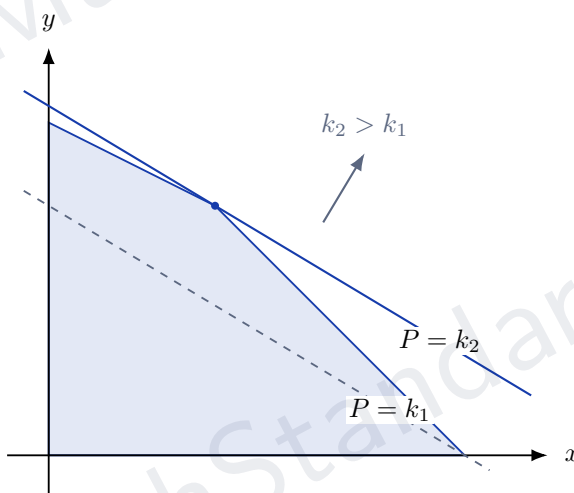
ตอบ 28 ที่ $(4, 4)$

3.3 เส้นระดับและทิศทางการเพิ่มค่า

เลื่อนเส้นขนาน

$$ax + by = k, \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{k}{b} \quad (b \neq 0)$$

k คือค่าระดับของฟังก์ชัน ทุกเส้นมีความชัน $-\frac{a}{b}$ การเพิ่ม k ไม่ได้หมายความว่าเลื่อนขึ้นเสมอไป หาก $b < 0$ จุดตัดแกน y จะลดลง จึงควรตรวจค่าที่จุดตัวอย่างหรือใช้ทิศ (a, b)



ถ้า $b = 0$ เส้นระดับเป็นแนวตั้งเมื่อ $a \neq 0$ หาก $a = b = 0$ ฟังก์ชันคงตัวและทุกจุดเป็นไปได้ให้ค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 19 $P = 2x - y$ มีเส้นระดับ $P = 2$ และ $P = 4$ เส้นใดมีจุดตัดแกน y ต่ำกว่า และค่าเพิ่มไปทางใด

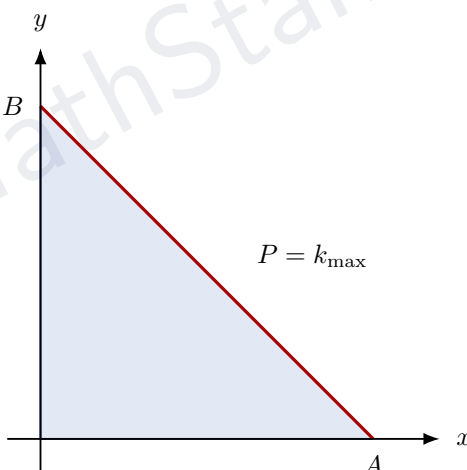
วิธีคิด จัดรูป $y = 2x - k$ เส้นระดับที่ตัดแกนที่ลบสี่ ต่ำกว่าเส้นระดับสองซึ่งตัดที่ลบสอง การเพิ่ม x หรือการลด y ทำให้ P เพิ่ม

ตอบ เส้น $P = 4$ มีจุดตัดต่ำกว่า ค่าเพิ่มไปทาง $(2, -1)$

3.4 คำตอบเดียวและคำตอบหลายจุด

เส้นระดับหับด้านที่เหมาะสม

ถ้าจุดมุมที่เชื่อมด้วยด้านเดียวกันสองจุดให้ค่าเหมาะสมเท่ากัน ทุกจุดบนด้านนั้นให้ค่าเดียวกัน หากมีเพียงจุดมุมเดียวให้ค่าที่ดีที่สุดอย่างเข้ม ในรูปหลายเหลี่ยมปิดที่มีขอบเขตจุดนั้นเป็นคำตอบเดียว



ตัวอย่าง 20 จงหาค่าสูงสุดของ $P = 2x + 2y$ และพิกัดที่ให้ค่านี้ ภายใต้เงื่อนไข

$$x + y \leq 5, \quad x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

โดย x, y เป็นจำนวนจริง

วิธีคิด หาจุดตัดของเส้นขอบและคัดจุดที่ผ่านข้อจำกัดทุกข้อ ได้จุดมุม

$$(0, 0), \quad (5, 0), \quad (0, 5)$$

ค่าฟังก์ชันที่จุดมุมตามลำดับคือ 0, 10, 10 จึงได้ค่าสูงสุด 10

ตอบ 10 ที่ทุกจุดบนส่วนของเส้นตรงจาก $(0, 5)$ ถึง $(5, 0)$

3.5 บริเวณว่างและบริเวณไม่มีขอบเขต

แยกสองกรณีให้ถูกต้อง

- บริเวณว่าง: ไม่มีแผนผ่านข้อจำกัด จึงไม่มีคำตอบที่เหมาะสม
- ฟังก์ชันไม่ถูกจำกัดด้านบน: มีแผนเป็นไปได้ที่ให้ค่าเพิ่มต่อไปได้ไม่จำกัด
- ฟังก์ชันไม่ถูกจำกัดด้านล่าง: มีแผนเป็นไปได้ที่ให้ค่าลดต่อไปได้ไม่จำกัด

บริเวณ ไม่มี ขอบเขต อาจ มี ค่าต่ำสุด หรือ ค่าสูงสุด ด้าน หนึ่ง ได้ และ บาง บริเวณ ไม่มี จุดมุม แต่ ยังมี ค่าเหมาะสม เช่น $y \geq 0$ ให้ $P = y$ ต่ำสุดศูนย์ตลอดแกน x

ตัวอย่าง 21 หา $P = x + 2y$ สูงสุดและต่ำสุดบน $x, y \geq 0$

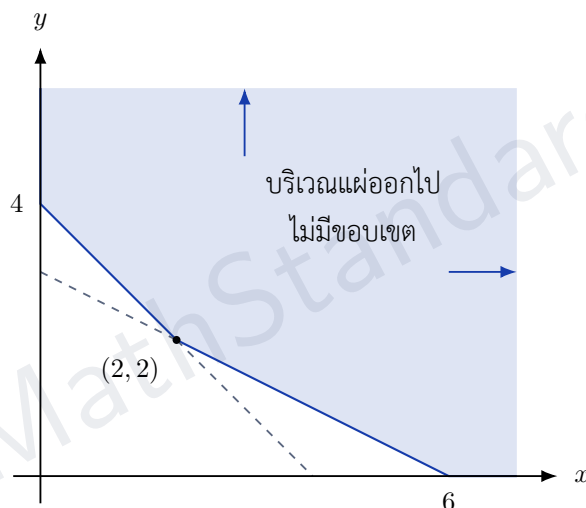
วิธีคิด ทุกจุดให้ $P \geq 0$ และ $(0, 0)$ ให้ศูนย์ จึงมีค่าต่ำสุด ส่วนจุด $(t, 0)$ เมื่อ t เพิ่มไม่จำกัดให้ $P = t$ จึงไม่มีค่าสูงสุด

ตอบ ค่าต่ำสุด 0 ที่ $(0, 0)$ ไม่มีค่าสูงสุด

3.6 ค่าต่ำสุดบนบริเวณแผ่ออกไป

ต้องตรวจทิศทางที่แผ่ออกไปด้วย

สำหรับบริเวณไม่มีขอบเขต การประเมินเฉพาะจุดมุมยังไม่เพียงพอ ต้องตรวจว่าฟังก์ชันลดลงหรือเพิ่มขึ้นไปในทิศทางที่เป็นไปได้หรือไม่ หากข้อจำกัดเป็นขั้นต่ำและสัมประสิทธิ์ต้นทุนเป็นบวก อาจมีต้นทุนต่ำสุดตามแนวขอบด้านล่าง



ตัวอย่าง 22 หา $C = 3x + 4y$ ต่ำสุดเมื่อ $x + y \geq 4$, $x + 2y \geq 6$, $x, y \geq 0$

วิธีคิด จุดมุม คือ $(0, 4), (2, 2), (6, 0)$ ให้ ต้นทุน 16, 14, 18 และ สามารถ ยืนยัน ทุก จุด ได้ จาก $C = 2(x + y) + (x + 2y) \geq 2(4) + 6 = 14$ ความเท่ากันเกิดที่ $(2, 2)$

ตอบ 14 ที่ $(2, 2)$

3.7 อสมการเข้มและค่าที่ไม่เกิดขึ้นจริง

ตรวจการเกิดค่าก่อนใช้คำว่าสูงสุดหรือต่ำสุด

หากจุดที่ดีที่สุดของรูปปิดถูกตัดออก ต้องตรวจว่ามีจุดอื่นให้ค่าเดียวกันหรือไม่ การเข้าใกล้ค่าหนึ่งได้ ไม่ได้แปลว่ามีจุดให้ค่านั้น และสำหรับจำนวนจริงอาจไม่มี “จุดที่ใกล้ที่สุด”

ตัวอย่าง 23 เปรียบเทียบ $P = x + y$ บน $x, y \geq 0$, $x + y < 4$ กับบน $x, y > 0$, $x + y \leq 4$

วิธีคิด กรณีแรกค่าเข้าใกล้สี่ได้แต่ทุกจุดให้ต่ำกว่าสี่ จึงไม่มีค่าสูงสุด กรณีหลังจุด $(2, 2)$ ยังผ่านและให้สี่ จึงมีค่าสูงสุดสี่ ทุกจุดบน $x + y = 4$ ที่พิกัดบวกให้ค่าเท่ากัน

ตอบ กรณีแรกไม่มีค่าสูงสุด กรณีหลังสูงสุด 4

3.8 ยืนยันคำตอบและเชื่อมสู่จำนวนเต็ม

รวมข้อจำกัดด้วยน้ำหนักไม่ติดลบ

หาก $a_i x + b_i y \leq c_i$ และเลือก $\lambda_i \geq 0$ ให้

$$\sum_i \lambda_i a_i = a, \quad \sum_i \lambda_i b_i = b$$

จะได้ $P = ax + by \leq \sum_i \lambda_i c_i$ ถ้าพบจุดที่ผ่านทุกข้อและทำให้เท่ากัน จุดนั้นยืนยันค่าสูงสุดได้ โดยไม่ต้องคำนวณทุกจุด

สำหรับโจทย์จำนวนเต็ม แบบจำลองจำนวนจริงให้ขอบเขตของค่าเหมาะสม หากแผนจำนวนจริงที่ดีที่สุดเป็นจำนวนเต็มและผ่านเงื่อนไขอยู่แล้ว แผนนั้นเหมาะสมในโจทย์จำนวนเต็มด้วย หากไม่เป็นจำนวนเต็ม ต้องตรวจแผนจำนวนเต็มใหม่

ตัวอย่าง 24 พิสูจน์ว่า $P = 3x + 4y$ ไม่เกินยี่สิบ เมื่อ $x + y \leq 6$, $x + 2y \leq 8$ และหาจุดที่ทำให้เท่ากัน

วิธีคิด รวมสองเท่าของข้อแรกกับข้อหลัง ได้ $P = 2(x + y) + (x + 2y) \leq 20$ ความเท่ากันต้องมี $x + y = 6$, $x + 2y = 8$ จึง $(x, y) = (4, 2)$ ซึ่งผ่านทั้งสองข้อ

ตอบ $P_{\max} = 20$ ที่ $(4, 2)$

สรุป

วิธีจุดมุมใช้กับรูปปิดมีขอบเขตภายใต้เงื่อนไขที่ระบุ เส้นระดับอธิบายคำตอบเดียวหรือหลายจุด บริเวณไม่มีขอบเขตต้องตรวจทิศทางเพิ่มลด ส่วนอสมการเข้มต้องตรวจว่าค่าที่คาดไว้เกิดจริง และสามารถรวมอสมการเพื่อยืนยันขอบเขตได้

เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

แบบฝึกหัดตอนที่ 3

ง่าย

ข้อ 41 จงหาค่าสูงสุดของ $P = 2x + y$ และพิกัดที่ให้ค่านี้ ภายใต้เงื่อนไข

$$x + y \leq 4, \quad x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

โดย x, y เป็นจำนวนจริง

ตอบ

ข้อ 42 จงหาค่าต่ำสุดของ $C = 3x + 2y$ และพิกัดที่ให้ค่านี้ ภายใต้เงื่อนไข

$$x \leq 4, \quad y \leq 3$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

โดย x, y เป็นจำนวนจริง

ตอบ