



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
และฟังก์ชันลอการิทึม

www.mathstandard.com

เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ครอบคลุมเลขยกกำลัง กรณธ์ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม สมการ อสมการ และแบบจำลองการเปลี่ยนแปลง

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ จำนวนจริง การแยกตัวประกอบ สมการกำลังสอง อสมการ ช่วง และการอ่านกราฟ

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ แทนเซตจำนวนจริง จำนวนตรรกยะ จำนวนเต็ม และจำนวนเต็มบวก ตามลำดับ
- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล a^x และลอการิทึม $\log_a x$ ใช้ฐาน $a > 0, a \neq 1$ เว้นแต่ระบุให้พิจารณาเป็นพิเศษ เลขยกกำลังเฉพาะรูป
- $\log x$ หมายถึงลอการิทึมฐานสิบ และ $\ln x$ หมายถึงลอการิทึมฐาน e โดย $e \approx 2.71828$
- จำนวนภายในลอการิทึมต้องเป็นบวก ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ และกรณธ์อันดับคู่ใช้ค่ารากหลักที่ไม่เป็นลบ
- $(\log_a x)^2$ เป็นกำลังสองของค่าลอการิทึม ส่วน $\log_a(x^2)$ เป็นลอการิทึมของกำลังสอง ต้องแยกความหมายทั้งสองรูป
- การยกกำลังสองอาจเพิ่มคำตอบ การหารด้วยนิพจน์ที่มีตัวแปรอาจทำให้คำตอบสูญหาย จึงต้องรักษาเงื่อนไขและตรวจในสมการเดิม
- เส้นประในกราฟแสดงเส้นกำกับหรือเส้นช่วยตามคำอธิบาย จุดปลายช่วงที่รวมใช้จุดทึบ และจุดที่ไม่รวมใช้จุดโปร่ง
- แบบจำลองการเติบโตและการลดลงใช้หน่วยเวลาและอัตราตามโจทย์ ปิดค่าประมาณเฉพาะขั้นสุดท้าย

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 เลขยกกำลังและกรณฑ์	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–16	9
ตอนที่ 2 สมการกรณฑ์และการแทนตัวแปร	
เนื้อหาและตัวอย่าง	19
แบบฝึกหัดข้อ 17–32	22
ตอนที่ 3 ฟังก์ชัน สมการ และอสมการเอกซ์โพเนนเชียล	
เนื้อหาและตัวอย่าง	32
แบบฝึกหัดข้อ 33–48	37
ตอนที่ 4 ฟังก์ชันลอการิทึมและสมบัติ	
เนื้อหาและตัวอย่าง	47
แบบฝึกหัดข้อ 49–64	53

เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 5 สมการลอการิทึม

เนื้อหาและตัวอย่าง	63
แบบฝึกหัดข้อ 65–80	66

ตอนที่ 6 อสมการลอการิทึมและเซตคำตอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	76
แบบฝึกหัดข้อ 81–96	80

ตอนที่ 7 ลอการิทึมสามัญ ฐานธรรมชาติ และแบบจำลอง

เนื้อหาและตัวอย่าง	90
แบบฝึกหัดข้อ 97–112	95

ตอนที่ 8 การประยุกต์ข้ามบทและแนวข้อสอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	105
แบบฝึกหัดข้อ 113–128	109
สรุปเนื้อหา เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	119
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	123
เฉลยเฉพาะคำตอบ	135
เฉลยวิธีคิด	143

เรื่อง พังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและพังก์ชันลอการิทึม

ตอนที่ 1 เลขยกกำลังและกรณฑ์

เป้าหมาย ใช้สมบัติเลขยกกำลังและกรณฑ์ พร้อมระบุเงื่อนไขของนิพจน์ก่อนจัดรูป

1.1 เลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก การยกกำลังคือการคูณฐานซ้ำตามจำนวนที่กำหนด เครื่องหมายลบที่อยู่นอกวงเล็บไม่ใช่ส่วนหนึ่งของฐาน

หลักการและสูตร

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ตัว}}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$$(-a)^{2n} = a^{2n}, \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

นิพจน์ 0^0 และ 0^{-n} ไม่กำหนดในเอกสารนี้ ส่วน $0^n = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า $(-3)^2 - 3^2 + 2^{-3}$

วิธีคิด $(-3)^2 = 9$ และ $2^{-3} = \frac{1}{8}$ จึงได้ $9 - 9 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

ตอบ $\frac{1}{8}$

1.2 สมบัติเลขยกกำลัง

เมื่อทุกนิพจน์มีนิยาม สามารถรวมเลขชี้กำลังของฐานเดียวกันได้ หากเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริงทั่วไป ให้ใช้ฐานบวก

หลักการและสูตร

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ และการใช้เลขชี้กำลังจริงในสูตรข้างต้นกำหนด $a, b > 0$

ตัวอย่าง 2 ให้ $x, y > 0$ จงจัดรูป $\frac{(2x^{-2}y)^3}{4x^{-1}y^{-2}}$

วิธีคิด กระจายกำลังแล้วลบเลขชี้กำลังของฐานเดียวกัน

$$\frac{8x^{-6}y^3}{4x^{-1}y^{-2}} = 2x^{-5}y^5 = \frac{2y^5}{x^5}$$

ตอบ $\frac{2y^5}{x^5}$

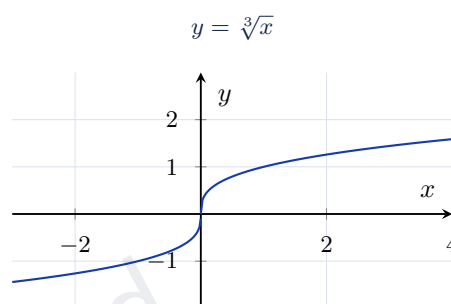
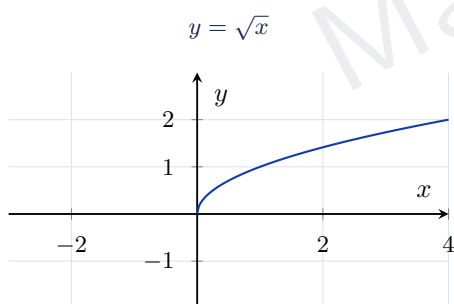
1.3 รากอันดับที่ n และค่าสัมบูรณ์

รากอันดับคู่ใช้ค่ารากหลักที่ไม่เป็นลบ ส่วนรากอันดับคี่มีค่าจริงได้ทั้งบวก ศูนย์ และลบ

หลักการและสูตร

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|, \quad \sqrt[n]{a^{2n+1}} = a$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก นิพจน์ $\sqrt[n]{u}$ มีค่าจริงเมื่อ $u \geq 0$ และ $\sqrt[n]{u}$ มีค่าจริงสำหรับ $u \in \mathbb{R}$



ตัวอย่าง 3 จงจัดรูป $\sqrt{(x-2)^2}$ และหาค่าเมื่อ $x = -1$

วิธีคิด $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ เมื่อ $x = -1$ ได้ $|-3| = 3$

ตอบ $|x-2|$ และ 3

1.4 เลขชี้กำลังตรรกยะและจำนวนจริง

ให้ $a > 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม โดย $n > 0$ เลขชี้กำลังตรรกยะเชื่อมโยงกับกรณฑ์ดังนี้ สำหรับเลขชี้กำลังอตรรกยะใช้การขยายความหมายอย่างต่อเนื่องของเลขยกกำลังฐานบวก

หลักการและสูตร

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

ฐานลบต้องพิจารณาเศษส่วนอย่างต่ำและอันดับรากเป็นรายกรณี ไม่ใช่สมบัติกำลังซ้อนโดยละเอียด

ตัวอย่าง 4 จงหาค่า $81^{\frac{3}{4}} + 32^{-\frac{2}{5}}$

วิธีคิด $81^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$ และ $32^{-\frac{2}{5}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ จึงได้ $27 + \frac{1}{4} = \frac{109}{4}$

ตอบ $\frac{109}{4}$

1.5 การจัดรูปกรณฑ์และสังยุค

รวมได้เฉพาะกรณฑ์ชนิดเดียวกัน การคูณด้วยสังยุคอาศัยผลต่างกำลังสอง โดยต้องรักษาเงื่อนไขตัวส่วนเดิม

หลักการและสูตร

$$\sqrt{uv} = \sqrt{u}\sqrt{v} \quad (u, v \geq 0), \quad \sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \quad (u \geq 0, v > 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} = \frac{\sqrt{u} - \sqrt{v}}{u - v} \quad (u, v \geq 0, u \neq v)$$

สูตรสังยุคที่เขียนเป็นเศษส่วนใช้ไม่ได้เมื่อ $u = v$ แม้นิพจน์เดิมบางรูปยังมีนิยาม

ตัวอย่าง 5 จงจัดรูป $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$

วิธีคิด คูณด้วยสังยุค

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \sqrt{7}+2$$

ตอบ $\sqrt{7}+2$

1.6 กรณฑ์ซ้อนและกำลังสองสมบูรณ์

ค้นหาจำนวนไม่เป็นลบ u, v ซึ่งผลบวกและผลคูณตรงกับนิพจน์ที่กำหนด แล้วใช้กำลังสองของผลบวกหรือผลต่าง

หลักการและสูตร

$$\sqrt{u+v+2\sqrt{uv}} = \sqrt{u} + \sqrt{v}$$

$$\sqrt{u+v-2\sqrt{uv}} = |\sqrt{u} - \sqrt{v}| \quad (u, v \geq 0)$$

ถ้ากำหนด $\sqrt{A+2\sqrt{B}}$ ให้หา $u+v = A$ และ $uv = B$

ตัวอย่าง 6 จงหาค่า $\sqrt{11+2\sqrt{30}} - \sqrt{11-2\sqrt{30}}$

วิธีคิด เลือก $u = 6, v = 5$ เพราะ $6+5 = 11$ และ $6 \cdot 5 = 30$ จึงได้ $(\sqrt{6} + \sqrt{5}) - (\sqrt{6} - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$

ตอบ $2\sqrt{5}$

1.7 ผลบวกที่หักล้างกัน

หากจัดพจน์ให้อยู่ในรูปผลต่างของพจน์ติดกัน พจน์ภายในจะหักล้างกัน เหลือพจน์ปลายสองข้าง กำหนด m, n เป็นจำนวนเต็มและ $m \leq n$

หลักการและสูตร

$$\sum_{k=m}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_m$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \quad (k \geq 0)$$

ตัวอย่าง 7 จงหาค่า $\sum_{k=8}^{35} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

วิธีคิด คูณสังยุคแต่ละพจน์แล้วหักล้าง

$$(\sqrt{9} - \sqrt{8}) + \cdots + (\sqrt{36} - \sqrt{35}) = 6 - 2\sqrt{2}$$

ตอบ $6 - 2\sqrt{2}$

สรุป

ตรวจสอบเส้นและฐานก่อนใช้สมบัติเลขชี้กำลัง รากอันดับคู่ใช้ค่าสัมบูรณ์ การจัดกรณฑ์ซ้อนใช้ผลบวกและผลคูณ ส่วนผลบวกหลายพจน์ควรตรวจสอบการหักล้างหลังคูณสังยุค

เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 จงหาค่า $(-4)^2 - 4^2 + 2^{-4}$

ตอบ

ข้อ 2 จงหาค่า $64^{\frac{2}{3}} - 16^{-\frac{1}{2}}$

ตอบ

เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ตอนที่ 3 ฟังก์ชัน สมการ และอสมการเอกซ์โพเนนเชียล

เป้าหมาย อ่านกราฟ วิเคราะห์การเพิ่มหรือลด และใช้ฐานร่วมกับการแทนตัวแปรแก้สมการและอสมการ

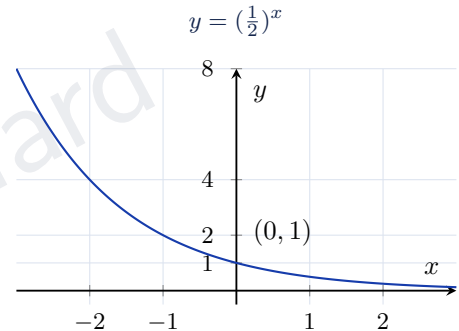
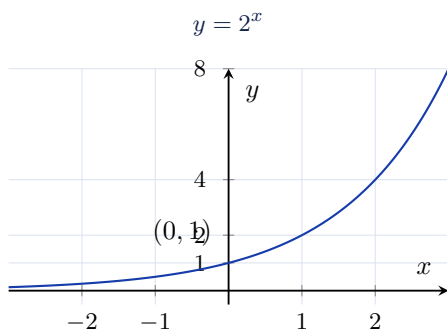
3.1 นิยามและกราฟมาตรฐาน

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลมีฐานคงตัวเป็นบวกและไม่เท่ากับหนึ่ง โดยตัวแปรอยู่ในเลขชี้กำลัง

หลักการและสูตร

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1), \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = (0, \infty)$$

กราฟผ่าน $(0, 1)$, $(1, a)$, $(-1, \frac{1}{a})$ มีเส้นกำกับ $y = 0$ และไม่ตัดแกน x เพราะ $a^x > 0$



ตัวอย่าง 14 จงระบุว่า $f(x) = (\frac{3}{4})^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด และหา $f(-2)$

วิธีคิด ฐานอยู่ในช่วง $(0, 1)$ จึงเป็นฟังก์ชันลด และ $f(-2) = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$

ตอบ ฟังก์ชันลด และ $f(-2) = \frac{16}{9}$

3.2 การเลื่อน สะท้อน และเรนจ์

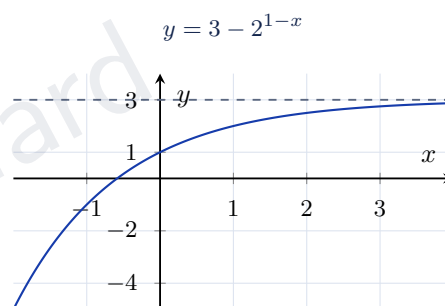
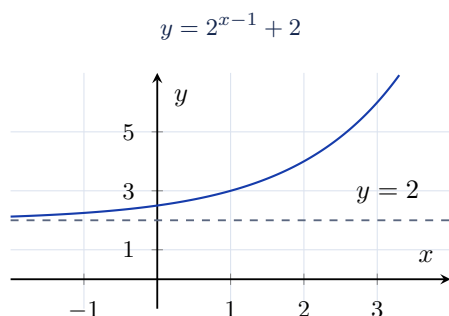
กำหนด $a > 0, a \neq 1, c \neq 0$ และ h, k เป็นจำนวนจริง ตัวคูณ c กำหนดการยืดและสะท้อน ส่วน h, k กำหนดการเลื่อนกราฟ

หลักการและสูตร

$$y = ca^{x-h} + k, \quad \text{เส้นกำกับ } y = k$$

$$R_f = \begin{cases} (k, \infty) & c > 0 \\ (-\infty, k) & c < 0 \end{cases}$$

$h > 0$ เลื่อนไปทางขวา h หน่วย และการแทน x ด้วย $-x$ สะท้อนผ่านแกน y



ตัวอย่าง 15 จงหาเรนจ์และเส้นกำกับของ $f(x) = 3 - 2^{1-x}$

วิธีคิด เนื่องจาก $2^{1-x} > 0$ จึงมี $f(x) < 3$ และเข้าใกล้ 3 เมื่อ x เพิ่มขึ้นโดยไม่สิ้นสุด เรนจ์คือ $(-\infty, 3)$
 เส้นกำกับคือ $y = 3$

ตอบ $(-\infty, 3)$ และ $y = 3$

3.3 ข้อมูลบนกราฟและช่วงจำกัด

สำหรับ $f(x) = ca^{x-h} + k$ ผลต่างระหว่างค่าฟังก์ชันกับเส้นกำกับมีอัตราส่วนคงตัวเมื่อฟังก์ชัน x เพิ่มขึ้นทีละหนึ่งหน่วย ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบนช่วงปิดหาได้จากทิศทางเพิ่มหรือลด

หลักการและสูตร

$$\frac{f(x+1) - k}{f(x) - k} = a$$

เมื่อ $c > 0$ ฟังก์ชันเพิ่มสำหรับ $a > 1$ และลดสำหรับ $0 < a < 1$ หาก $c < 0$ ทิศทางจะสลับกัน

ตัวอย่าง 16 ให้ $f(x) = 2^{x-1} + 3$ เมื่อ $x \in [0, 3]$ จงหาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด

วิธีคิด ฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงที่กำหนด จึงมีค่าต่ำสุด $f(0) = \frac{7}{2}$ และค่าสูงสุด $f(3) = 7$

ตอบ ค่าต่ำสุด $\frac{7}{2}$ และค่าสูงสุด 7

3.4 สมการฐานเดียวกัน

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง จึงเทียบเลขชี้กำลังได้เมื่อฐานเดียวกันและผ่านเงื่อนไขฐาน

หลักการและสูตร

$$a^{F(x)} = a^{G(x)} \iff F(x) = G(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

ก่อนเทียบเลขชี้กำลังให้เขียนจำนวนทุกตัวเป็นกำลังของฐานร่วม และตรวจโดเมนของ F, G

ตัวอย่าง 17 จงแก้สมการ $9^{x+1} = 27^{x-1}$

วิธีคิด เขียนเป็นฐาน 3 ได้ $3^{2x+2} = 3^{3x-3}$ จึงมี $2x+2 = 3x-3$ หรือ $x = 5$

ตอบ $x = 5$

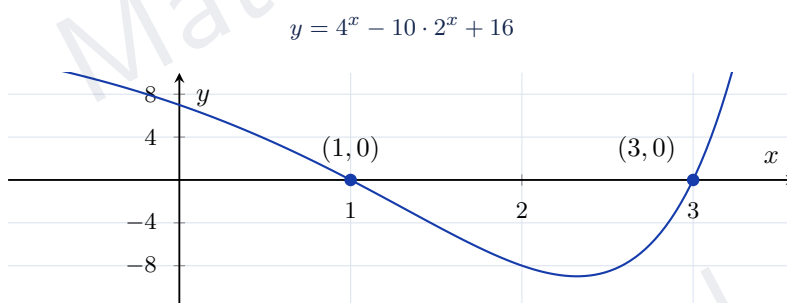
3.5 สมการกำลังสองในเลขยกกำลัง

หากมี $a^{2F(x)}$ และ $a^{F(x)}$ ให้แทน $t = a^{F(x)} > 0$ แล้วแก้พหุนามใน t ค่าที่ไม่เป็นบวกใช้ไม่ได้

หลักการและสูตร

$$a^{2F(x)} + pa^{F(x)} + q = 0 \implies t^2 + pt + q = 0, \quad t > 0$$

ถ้า $t = a^{|F(x)|}$ และ $a > 1$ ต้องมี $t \geq 1$



ตัวอย่าง 18 จงแก้สมการ $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

วิธีคิด ให้ $t = 2^x > 0$ ได้ $(t - 2)(t - 8) = 0$ จึงมี $2^x = 2$ หรือ $2^x = 8$ และ $x = 1, 3$

ตอบ $x = 1, 3$

3.6 การแยกตัวประกอบในสมการหลายฐาน

ตัวประกอบที่เป็นเลขยกกำลังฐานบวกไม่เป็นศูนย์ จึงหารออกได้ หากสมการมีผลคูณของฐานต่างกัน อาจจัดหมู่เป็นผลคูณของสองนิพจน์

หลักการและสูตร

$$p^x q^x = (pq)^x \quad (p, q > 0)$$

$$(p^x - A)(q^x - B) = 0 \iff p^x = A \text{ หรือ } q^x = B$$

ตัวอย่าง 19 จงแก้สมการ $6^x - 4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 36 = 0$

วิธีคิด จัดรูปเป็น $(2^x - 4)(3^x - 9) = 0$ ทั้งสองตัวประกอบให้ $x = 2$ จึงมีคำตอบที่แตกต่างกันเพียงค่าเดียว

ตอบ $x = 2$

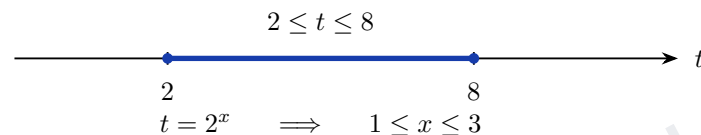
3.7 อสมการและการทดสอบเครื่องหมาย

ทิศทางของอสมการขึ้นอยู่กับฐาน หากเปลี่ยนเป็นเศษส่วนใน $t = a^x$ ต้องตรวจ $t > 0$ และตัดศูนย์ของตัวส่วนก่อนแปลงช่วงกลับ

หลักการและสูตร

$$a^{F(x)} < a^{G(x)} \iff \begin{cases} F(x) < G(x) & a > 1 \\ F(x) > G(x) & 0 < a < 1 \end{cases}$$

การคูณด้วยนิพจน์ที่ยังไม่ทราบเครื่องหมายต้องแยกกรณี หรือใช้แผนภาพเครื่องหมาย



ตัวอย่าง 20 จงแก้สมการ $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 \leq 0$

วิธีคิด ให้ $t = 2^x > 0$ ได้ $(t - 2)(t - 8) \leq 0$ จึงมี $2 \leq t \leq 8$ ฐาน $2 > 1$ ให้ $1 \leq x \leq 3$

ตอบ $[1, 3]$

สรุป

ฐาน $a > 1$ คงลำดับ ส่วนฐาน $0 < a < 1$ กลับลำดับ การแทน $t = a^x$ ต้องมี $t > 0$ และการแทน $t = a^{|x|}$ อาจมีเงื่อนไขเข้มกว่า ตรวจเงื่อนไขก่อนแปลงคำตอบกลับ

เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

แบบฝึกหัดตอนที่ 3

ง่าย

ข้อ 33 จงระบุว่า $f(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$ เพิ่มขึ้นหรือลด พร้อมโดเมนและเรนจ์

ตอบ

ข้อ 34 จงแก้ $4^{x+1} = 8^{x-2}$

ตอบ