



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

www.mathstandard.com

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ครอบคลุมการดำเนินการ สังยุค ค่าสัมบูรณ์ ระนาบเชิงซ้อน รูปเชิงขั้ว การยกกำลัง ราก และสมการพหุนาม

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ จำนวนจริง การจัดรูปพีชคณิต ระบบสมการ พหุนาม และตรีโกณมิติ

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ฝึกวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ และ $i^2 = -1$ โดย i เป็นหน่วยจินตภาพ
- $\operatorname{Re} z = a$ และ $\operatorname{Im} z = b$ เป็นจำนวนจริง ส่วนจินตภาพจึงหมายถึง b มิใช่ bi
- $\bar{z} = a - bi$ แทนสังยุค และ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ แทนค่าสัมบูรณ์หรือโมดูลัส
- ใช้จุด z แทนจุด (a, b) ในระนาบเชิงซ้อน แกนจริงเป็นแกนนอนและแกนจินตภาพเป็นแกนตั้ง โดยใช้มาตราส่วนของแกนทั้งสองเท่ากัน
- กำหนด $\operatorname{cis} \theta = \cos \theta + i \sin \theta$ และใช้เรเดียนเมื่อไม่กำกับเครื่องหมายองศา
- อาร์กิวเมนต์หลักใช้ $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$ สำหรับ $z \neq 0$ ส่วนอาร์กิวเมนต์ทั้งหมดต่างกันด้วย $2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$
- คำว่า “รากทั้งหมด” หมายถึงคำตอบทุกค่าใน $\mathbb{C}$ ซึ่งรวมจำนวนจริงด้วย ถ้าต้องนับตามพหุภาพจะระบุไว้โดยตรง
- สัญลักษณ์ $\sqrt{t}$ สำหรับ $t \geq 0$ หมายถึงรากที่สองที่ไม่เป็นลบ สำหรับจำนวนเชิงซ้อนจะใช้ข้อความ “รากที่สองทั้งหมด” หรือสมการ $w^2 = z$ เพื่อแยกจากการเลือกค่าหลัก

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 พืชมณิตและสังยุค	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–20	12
ตอนที่ 2 ค่าสัมบูรณ์และเรขาคณิต	
เนื้อหาและตัวอย่าง	22
แบบฝึกหัดข้อ 21–40	30
ตอนที่ 3 รูปเชิงขั้วและการยกกำลัง	
เนื้อหาและตัวอย่าง	40
แบบฝึกหัดข้อ 41–60	46

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 รากของจำนวนเชิงซ้อน

เนื้อหาและตัวอย่าง	56
แบบฝึกหัดข้อ 61–80	61

ตอนที่ 5 สมการพหุนาม

เนื้อหาและตัวอย่าง	71
แบบฝึกหัดข้อ 81–100	76

ตอนที่ 6 การประยุกต์และการให้เหตุผล

เนื้อหาและตัวอย่าง	86
แบบฝึกหัดข้อ 101–120	90
สรุปเนื้อหา เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน	101
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	107
เฉลยเฉพาะคำตอบ	120
เฉลยวิธีคิด	127

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

ตอนที่ 1 พีชคณิตและสัญลักษณ์

เป้าหมาย ระบุส่วนประกอบ ดำเนินการในรูปมาตรฐาน และใช้สัญลักษณ์การคูณและการหารโดยรักษาเงื่อนไขของตัวหาร

1.1 ความหมายและส่วนประกอบ

จำนวนเชิงซ้อนเขียนได้เพียงแบบเดียวในรูป $z = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ $i^2 = -1$ ส่วนจริงคือ a ส่วนจินตภาพคือ b จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์

หลักการและสูตร

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b$$

$$z \in \mathbb{R} \iff b = 0, \quad z \text{ เป็นจินตภาพแท้} \iff a = 0, b \neq 0$$

จำนวนเชิงซ้อน ไม่มี การ เรียงลำดับ มาก หรือ น้อย ที่ สอดคล้อง กับ สมบัติ การ บวก และ คูณ แบบ จำนวนจริง เงื่อนไขมากหรือน้อยจึงใช้กับปริมาณจริง เช่น $\operatorname{Re} z$ การใช้กฎเกณฑ์ต้องตรวจสอบเงื่อนไขในระบบจำนวนจริง ไม่ขยายกฎผลคูณไปยังจำนวนลบโดยตรง

ตัวอย่าง 1 ให้ $z = -4 + 7i$ จงระบุส่วนจริง ส่วนจินตภาพ และพิจารณาว่าเป็นจินตภาพแท้หรือไม่

วิธีคิด เทียบกับ $a + bi$ ได้ $a = -4$ และ $b = 7$ ส่วนจริงไม่เป็นศูนย์จึงไม่เป็นจินตภาพแท้

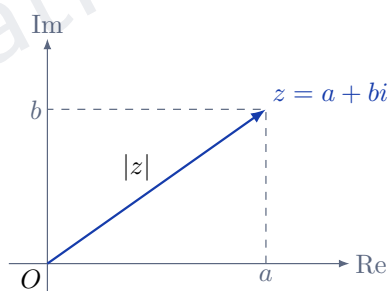
ตอบ $\operatorname{Re} z = -4, \operatorname{Im} z = 7$ และไม่เป็นจินตภาพแท้

1.2 ระบายเชิงซ้อนและการเท่ากัน

จุด (a, b) แทนจำนวน $a + bi$ โดยแกนนอนเป็นแกนจริงและแกนตั้งเป็นแกนจินตภาพ การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนจึงเท่ากับการเท่ากันของส่วนประกอบทั้งสอง

หลักการและสูตร

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ และ } b = d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$



ตัวอย่าง 2 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ และ $(2x + y) + (x - 2y)i = 7 - 4i$ จงหา x, y

วิธีคิด เทียบส่วนจริงและส่วนจินตภาพได้ระบบ

$$2x + y = 7, \quad x - 2y = -4$$

จากสมการแรก $y = 7 - 2x$ แทนในสมการที่สองได้ $5x = 10$ จึง $x = 2$ แล้ว $y = 3$

ตอบ $x = 2, y = 3$

1.3 การบวก ลบ และคูณ

การบวกและลบรวมส่วนจริงกับส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับส่วนจินตภาพ การคูณใช้สมบัติแจกแจงแล้วแทน $i^2 = -1$ สมบัติสลับที่ เปลี่ยนหมู่ และแจกแจงยังคงใช้ได้

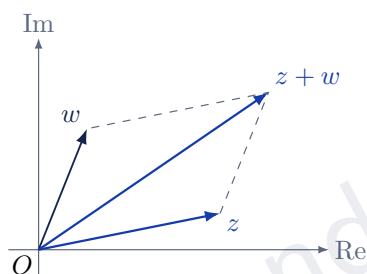
หลักการและสูตร

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$



ตัวอย่าง 3 กำหนด $z = 2 - 3i$ และ $w = -1 + 2i$ จงหา $z + w$ และ zw

วิธีคิด รวมส่วนประกอบได้ $z + w = (2 - 1) + (-3 + 2)i = 1 - i$ ส่วนผลคูณเป็น

$$(2 - 3i)(-1 + 2i) = -2 + 7i - 6i^2 = 4 + 7i$$

ตอบ $z + w = 1 - i$ และ $zw = 4 + 7i$

1.4 สังยุคและสมบัติ

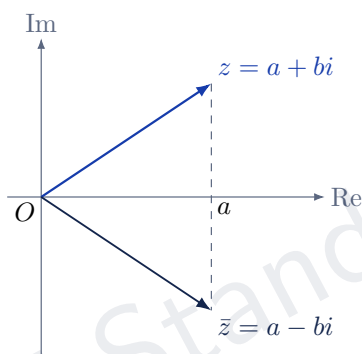
สังยุคของ $z = a + bi$ คือ $\bar{z} = a - bi$ เป็นการสะท้อนจุดผ่านแกนจริง การหาสังยุคของผลบวก ผลคูณ หรือ ผลหารต้องกระทำกับทุกจำนวนที่เกี่ยวข้อง

หลักการและสูตร

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\frac{\bar{z}}{w} = \frac{\bar{\bar{z}}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)$$



ตัวอย่าง 4 จงหา z เมื่อ $3z + \bar{z} = 12 + 4i$

วิธีคิด กำหนด $z = x + yi$ โดย $x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว $\bar{z} = x - yi$ จึงได้ $4x + 2yi = 12 + 4i$ เทียบส่วนประกอบได้ $x = 3$ และ $y = 2$

ตอบ $z = 3 + 2i$

1.5 การหารและอินเวอร์ส

เมื่อหารด้วย $w = c + di \neq 0$ ให้คูณเศษและส่วนด้วย $\bar{w}$ ตัวส่วนจึงเป็นจำนวนจริงบวก $c^2 + d^2$ เอกลักษณ์การบวกคือ 0 เอกลักษณ์การคูณคือ 1 และเฉพาะจำนวนไม่เป็นศูนย์เท่านั้นที่มีอินเวอร์สการคูณ

หลักการและสูตร

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad (c^2 + d^2 > 0)$$

$$-z \text{ เป็นอินเวอร์สการบวก, } z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \quad (z \neq 0)$$

ตัวอย่าง 5 จงเขียน $\frac{4 + i}{1 - 2i}$ ในรูปมาตรฐาน

วิธีคิด คูณด้วยสังยุค $1 + 2i$ ทั้งเศษและส่วน

$$\frac{4 + i}{1 - 2i} = \frac{(4 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{2 + 9i}{5}$$

ตอบ $\frac{2}{5} + \frac{9}{5}i$

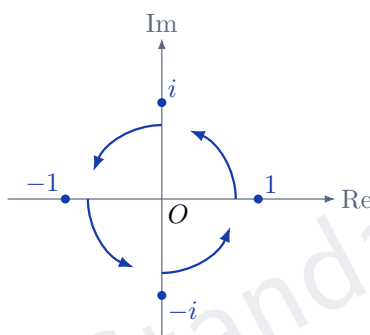
1.6 กำลังของหน่วยจินตภาพ

กำลังของ i มีวัฏจักรยาว 4 เพราะ $i^4 = 1$ สำหรับเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม n ให้เขียน $n = 4q + r$ เมื่อ $0 \leq r < 4$ แล้วใช้ $i^n = i^r$ หลักการนี้ใช้กับเลขชี้กำลังติดลบได้ด้วย

หลักการและสูตร

เลข r	0	1	2	3
i^r	1	i	-1	$-i$

$$i^{4q+r} = i^r, \quad i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$$



คูณด้วย i คือหมุน 90° ทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่าง 6 จงหา $i^{2027} + i^{-6}$

วิธีคิด $2027 = 4(506) + 3$ จึง $i^{2027} = -i$ และ $-6 = 4(-2) + 2$ จึง $i^{-6} = -1$ รวมทั้งสองพจน์

ตอบ $-1 - i$

1.7 ผลรวมกำลังและพหุนาม

ในผลรวมที่มีสัมประสิทธิ์แตกต่างกัน ให้จัดกลุ่มตามเศษของเลขชี้กำลังเมื่อหารด้วย 4 ก่อนรวมพจน์จริงและจินตภาพ ส่วนพหุนามคำนวณโดยแทนค่าแล้วลดกำลังของ i

หลักการและสูตร

$$\sum_{j=0}^N c_j i^j = \sum_{j \equiv 0 (4)} c_j - \sum_{j \equiv 2 (4)} c_j + i \left(\sum_{j \equiv 1 (4)} c_j - \sum_{j \equiv 3 (4)} c_j \right)$$

ในสูตร c_j เป็นสัมประสิทธิ์จริง และผลรวมแต่ละชุดนับเฉพาะ $0 \leq j \leq N$

ตัวอย่าง 7 จงหา $\sum_{j=0}^7 (j+2)i^j$

วิธีคิด เขียนพจน์ครบหนึ่งรอบสองครั้งแล้วจัดกลุ่ม

$$\begin{aligned} S &= 2 + 3i - 4 - 5i + 6 + 7i - 8 - 9i \\ &= (2 - 4 + 6 - 8) + (3 - 5 + 7 - 9)i \end{aligned}$$

ตอบ $-4 - 4i$

1.8 สมการและเงื่อนไขส่วนประกอบ

สมการที่มี z และ $\bar{z}$ เปลี่ยนเป็นระบบสมการจริงได้ด้วย $z = x + yi$ เงื่อนไขเป็นจำนวนจริงใช้ส่วนจินตภาพเท่ากับศูนย์ ส่วนจินตภาพแท้ต้องมีส่วนจริงเป็นศูนย์และส่วนจินตภาพไม่เป็นศูนย์ หลังจากดูตัวอย่างต้องตรวจสอบข้อจำกัดเดิม

หลักการและสูตร

$$\operatorname{Im} w = 0 \iff w \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} w = 0, \operatorname{Im} w \neq 0 \iff w \text{ เป็นจินตภาพแท้}$$

ตัวอย่าง 8 ให้ $t \in \mathbb{R}$ ถ้า $\frac{t+2i}{1-i}$ เป็นจินตภาพแท้ จงหา t

วิธีคิด ตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ และ

$$\frac{t+2i}{1-i} = \frac{(t-2) + (t+2)i}{2}$$

ส่วนจริงเป็นศูนย์ให้ $t = 2$ ซึ่งให้ส่วนจินตภาพ $2 \neq 0$ จึงผ่านเงื่อนไข

ตอบ $t = 2$

สรุป

ใช้ $i^2 = -1$ และเทียบส่วนประกอบจริง สังเกตเปลี่ยนเครื่องหมายเฉพาะส่วนจินตภาพ การหารต้องมีตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ และกำลังของ i พิสูจน์เศษเมื่อหารด้วย 4

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 ให้ $z = 4 - 3i$, $w = -2 + 5i$ จงหา $z + w$

ตอบ

ข้อ 2 จงหา $(1 + 2i)(3 - i)$

ตอบ

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

ตอนที่ 3 รูปเชิงขั้วและการยกกำลัง

เป้าหมาย เปลี่ยนระหว่างรูปมาตรฐานกับรูปเชิงขั้ว ใช้ควอดรนต์ คาบ และทฤษฎีบทเดอมัวร์วิเคราะห์การคูณและกำลัง

3.1 ขนาด อาร์กิวเมนต์ และรูปเชิงขั้ว

ให้ $z = a + bi \neq 0$ มีขนาด $r > 0$ และมุม θ วัดจากแกนจริงด้านบวก โดยทวนเข็มนาฬิกาเป็นทิศบวก อาร์กิวเมนต์ทั้งหมดต่างกันที่รอบเต็ม ในเอกสารนี้เลือกอาร์กิวเมนต์หลักในช่วง $(-\pi, \pi]$

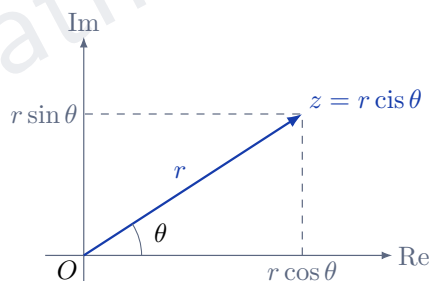
หลักการและสูตร

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

เมื่อ $a \neq 0$ มี $\tan \theta = \frac{b}{a}$ แต่ต้องใช้เครื่องหมายของ a, b เลือกควอดรนต์ด้วย จำนวน 0 ไม่มีอาร์กิวเมนต์



ตัวอย่าง 17 เขียน $z = -\sqrt{3} - i$ ในรูปเชิงขั้วโดยใช้อาร์กิวเมนต์หลัก

วิธีคิด $r = \sqrt{3+1} = 2$ จุดอยู่ควอดรนต์ที่สามและมีมุมอ้างอิง $\frac{\pi}{6}$ มุมในช่วง $[0, 2\pi)$ คือ $\frac{7\pi}{6}$ จึงเลือกมุม

หลัก $-\frac{5\pi}{6}$

ตอบ $2 \operatorname{cis}(-\frac{5\pi}{6})$

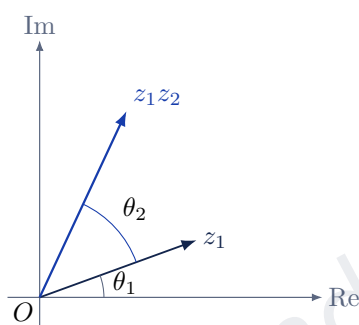
3.2 การคูณและหารในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z_j = r_j \operatorname{cis} \theta_j \neq 0$ โดย $r_j > 0$ การคูณทำให้ขนาดคูณกันและอาร์กิวเมนต์บวกกัน การหารทำให้ขนาดหารกันและอาร์กิวเมนต์ลบกัน โดยตัวหารต้องไม่เป็นศูนย์ ผลคูณอาจลดด้วยจำนวนเท่าของ 2π ได้

หลักการและสูตร

$$(r_1 \operatorname{cis} \alpha)(r_2 \operatorname{cis} \beta) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\alpha + \beta)$$

$$\frac{r_1 \operatorname{cis} \alpha}{r_2 \operatorname{cis} \beta} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\alpha - \beta) \quad (r_2 > 0)$$



ตัวอย่าง 18 ให้ $z = 2 \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4})$ และ $w = 3 \operatorname{cis}(\frac{\pi}{12})$ จงหา zw ในรูปมาตรฐาน

วิธีคิด คูณขนาดได้ 6 และบวกมุมได้ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ จึงเป็น $6(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2})$

ตอบ $3 + 3\sqrt{3}i$

3.3 การหมุนและการเปลี่ยนขนาด

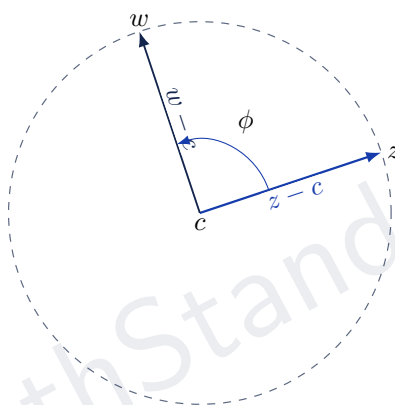
คูณ z ด้วย $\rho \operatorname{cis} \phi$ เมื่อ $\rho > 0$ คือการขยายระยะจากจุดกำเนิดด้วยตัวคูณ ρ แล้วหมุนมุม ϕ ถ้าหมุนรอบจุด c ให้ย้ายจุดอ้างอิงไปยัง c ก่อนแล้วจึงย้ายกลับ

หลักการและสูตร

$$w = \rho \operatorname{cis} \phi z, \quad |w| = \rho |z|$$

$$w - c = \rho \operatorname{cis} \phi (z - c)$$

$$iz \text{ หมุน } \frac{\pi}{2}, \quad -z \text{ หมุน } \pi, \quad -iz \text{ หมุน } -\frac{\pi}{2}$$



ตัวอย่าง 19 หมุนจุด $z = 3 + 2i$ รอบ $c = 1 + i$ ทวนเข็มนาฬิกา 90° จงหาจุดภาพ

วิธีคิด เวกเตอร์จากศูนย์กลางคือ $z - c = 2 + i$ คูณด้วย i ได้ $i(2 + i) = -1 + 2i$ แล้วย้ายกลับ

$$w = (1 + i) + (-1 + 2i) = 3i$$

ตอบ $w = 3i$

3.4 ทฤษฎีบทเดอมัวร์

สำหรับเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม การยกกำลังในรูปเชิงขั้วทำโดยยกกำลังขนาดและคูณมุมด้วยเลขชี้กำลัง เมื่อเลขชี้กำลังติดลบต้องมีฐานไม่เป็นศูนย์ และใช้ค่ามุมที่มีหน่วยสอดคล้องกัน

หลักการและสูตร

$$(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta) \quad (n \in \mathbb{Z}, r > 0)$$

เลขชี้กำลังไม่ใช่จำนวนเต็มไม่อยู่ในขอบเขตของสูตรนี้โดยไม่ระบุการเลือกค่าของกำลัง

ตัวอย่าง 20 จงหา $(-1 + \sqrt{3}i)^6$

วิธีคิด ฐานมีขนาด 2 และมุม $\frac{2\pi}{3}$ จึง

$$(-1 + \sqrt{3}i)^6 = 2^6 \operatorname{cis}(4\pi) = 64$$

ตอบ 64

3.5 ผลบวกกำลังกับสังยุคและระยะทาง

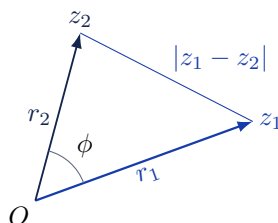
ถ้า $z = r \operatorname{cis} \theta$ จะมี $\bar{z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$ การบวกกำลังกับสังยุคทำให้พจน์จินตภาพหักล้างกัน ส่วนระยะระหว่างจำนวนสองจำนวนใช้กฎของโคไซน์กับผลต่างของมุม

หลักการและสูตร

$$z^n + \bar{z}^n = 2r^n \cos(n\theta), \quad z^n - \bar{z}^n = 2ir^n \sin(n\theta)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

สูตรกำลังใช้เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และถ้า $n < 0$ ต้องมี $z \neq 0$ ในสูตรระยะ $r_j = |z_j|$



ตัวอย่าง 21 จำนวน z_1, z_2 มีขนาด 3, 5 และอาร์กิวเมนต์ต่างกัน $\frac{\pi}{3}$ จงหา $|z_1 - z_2|$

วิธีคิด ใช้กฎของโคไซน์

$$|z_1 - z_2|^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 34 - 15 = 19$$

ระยะเป็นจำนวนไม่เป็นลบ จึงเลือกรากบวก

ตอบ $\sqrt{19}$

3.6 เอกลัษณ์บนวงกลมหนึ่งหน่วย

เมื่อ $|u| = 1$ จะมี $u\bar{u} = 1$ จึง $\bar{u} = \frac{1}{u}$ ถ้า $u \neq -1$ การจับคู่จำนวนกับสังยุคช่วยหาส่วนจริงของเศษส่วนโดยไม่ต้องหาส่วนจินตภาพทั้งหมด

หลักการและสูตร

$$u + u^{-1} = 2 \cos \theta, \quad u - u^{-1} = 2i \sin \theta \quad (u = \text{cis } \theta)$$

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+\bar{u}} = 1 \implies \text{Re} \frac{1}{1+u} = \frac{1}{2} \quad (|u| = 1, u \neq -1)$$

ตัวอย่าง 22 ให้ $u = \text{cis}(\frac{2\pi}{3})$ จงหาส่วนจริงของ $\frac{10}{1+u}$

วิธีคิด $|u| = 1$ และ $u \neq -1$ สังยุคของ $\frac{1}{1+u}$ คือ $\frac{1}{1+\bar{u}}$ ผลบวกทั้งสองเท่ากับ 1 จึงมีส่วนจริง $\frac{1}{2}$ คูณด้วย 10 ได้ 5

ตอบ 5

3.7 คาบ มุมบนแกน และการนับเลขชี้กำลัง

เงื่อนไขของ กำลังบนวงกลมหนึ่งหน่วยแปลงเป็นสมการมุมที่ต่างกันด้วยจำนวนเท่าของ 2π ก่อนนับจำนวนเต็มในช่วง ถ้ามุมปลายเป็นจำนวนเท่าของ $\frac{\pi}{2}$ จุดอาจอยู่บนแกนและไม่อยู่ในควอดรันต์ใด

หลักการและสูตร

$$(\text{cis } \theta)^k = \text{cis } \alpha \iff k\theta = \alpha + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

ต้องคงข้อกำหนดว่า k เป็นจำนวนเต็มและนับเฉพาะค่าที่อยู่ในช่วงซึ่งโจทย์ระบุ

ตัวอย่าง 23 ให้ $u = \text{cis}(\frac{\pi}{4})$ จงนับจำนวนเต็ม $1 \leq k \leq 30$ ที่ทำให้ $u^k = -1$

วิธีคิด $\frac{k\pi}{4} = \pi + 2m\pi$ จึง $k = 4 + 8m$ ค่าที่อยู่ในช่วงคือ 4, 12, 20, 28 รวม 4 ค่า

ตอบ 4 ค่า

สรุป

พิจารณาควอดรันต์ก่อนเลือกมุม การคูณบวกมุม การหารลบมุม และกำลังจำนวนเต็มคูณมุม ใช้คาบเพื่อลดมุมและนับคำตอบ โดยตรวจจุดบนแกนและเงื่อนไขไม่เป็นศูนย์

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

แบบฝึกหัดตอนที่ 3

ง่าย

ข้อ 41 เขียน $-1 + i$ ในรูปเชิงขั้วโดยใช้มุมใน $[0, 2\pi)$

ตอบ

ข้อ 42 เขียน $4 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ ในรูปมาตรฐาน

ตอบ