



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

www.mathstandard.com

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.0

เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ครอบคลุมลิมิต ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ ปริยานุพันธ์ ปริพันธ์ และการประยุกต์กับกราฟ การเคลื่อนที่ พื้นที่ และการหาค่าที่เหมาะสม

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ ได้แก่ การจัดรูปพีชคณิต สมการ อสมการ ฟังก์ชัน กราฟ เลขยกกำลัง ลอการิทึม และตรีโกณมิติ

แบบฝึกหัด ประกอบ ด้วย ระดับ ง่าย กลาง ยาก ประยุกต์ และ ผีวิเคราะห์ พร้อม แบบ ทดสอบ ทบทวนท้ายบท เฉลยเฉพาะคำตอบและเฉลยวิธีคิดอยู่ส่วนท้ายของเอกสาร

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $\mathbb{R}$ แทนเซตจำนวนจริง ฟังก์ชันและลิมิตพิจารณาในโดเมนจริง เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น
- $x \rightarrow a^-$ และ $x \rightarrow a^+$ หมายถึงเข้าใกล้จากด้านซ้ายและขวา ตามลำดับ ลิมิตอาจไม่เท่ากับค่าฟังก์ชัน ณ จุดนั้น
- $f'(x)$ และ $\frac{df}{dx}$ แทนอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ส่วน $f''(x)$ และ $f^{(n)}(x)$ แทนอนุพันธ์อันดับสองและอันดับที่ n
- สูตรตรีโกณมิติและอนุพันธ์ตรีโกณมิติใช้มุมหน่วยเรเดียน
- C, C_1, C_2 เป็นค่าคงตัวของการอินทิเกรต แต่ละครั้งอาจเป็นคนละค่า ปริพันธ์จำกัดเขตเป็นจำนวนและไม่ต้องใส่ $+C$
- Area แทนพื้นที่ ซึ่งไม่ติดลบ ปริพันธ์จำกัดเขตอาจเป็นบวก ศูนย์ หรือลบ
- แบบจำลองการเคลื่อนที่ที่กำหนดทิศบวกและหน่วยในข้อนั้น ความเร็วมีเครื่องหมาย ส่วนอัตราเร็วเป็นค่าสัมบูรณ์ของความเร็ว
- จุดโพรบนกราฟไม่รวมเป็นค่าฟังก์ชัน จุดที่บวกรวมเป็นค่าฟังก์ชัน และใช้พิภพหรือสมการที่กำกับในการคำนวณ

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

สารบัญ

คำชี้แจง	1
ตอนที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง	
เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–20	10
ตอนที่ 2 อนุพันธ์และกฎการหาอนุพันธ์	
เนื้อหาและตัวอย่าง	20
แบบฝึกหัดข้อ 21–40	25
ตอนที่ 3 เรขาคณิตและพฤติกรรมของฟังก์ชัน	
เนื้อหาและตัวอย่าง	35
แบบฝึกหัดข้อ 41–60	41

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 4 การเคลื่อนที่และการหาค่าที่เหมาะสม

เนื้อหาและตัวอย่าง	51
แบบฝึกหัดข้อ 61–80	58

ตอนที่ 5 ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์

เนื้อหาและตัวอย่าง	68
แบบฝึกหัดข้อ 81–100	73

ตอนที่ 6 พื้นที่และการประยุกต์ปริพันธ์

เนื้อหาและตัวอย่าง	83
แบบฝึกหัดข้อ 101–120	89
สรุปเนื้อหา เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น	99
แบบทดสอบทบทวนท้ายบท	105
เฉลยเฉพาะคำตอบ	118
เฉลยวิธีคิด	125

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

ตอนที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

เป้าหมาย อ่านพฤติกรรมใกล้จุด แยกลิมิตออกจากค่าฟังก์ชัน และจัดรูปนิพจน์พร้อมตรวจด้านและโดเมน

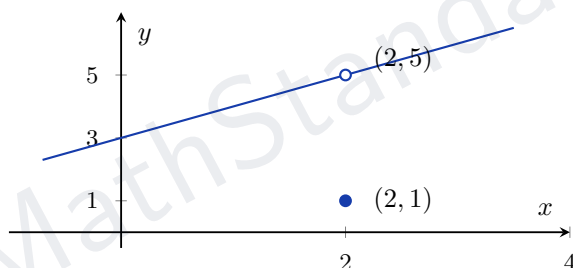
1.1 ลิมิตและลิมิตด้านเดียว

ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a คือค่าที่ฟังก์ชันเข้าใกล้ โดยไม่จำเป็นต้องนิยาม $f(a)$ และลิมิตอาจไม่เท่ากับ $f(a)$ สัญลักษณ์ a^- หมายถึงเข้าใกล้จากด้านซ้าย ส่วน a^+ หมายถึงด้านขวา

หลักการและสูตร

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

ลิมิตสองด้านเป็นจำนวนจริงเมื่อทั้งสองด้านมีลิมิตจำกัดและเท่ากัน จุดโพร่งบนกราฟไม่ใช่ค่าฟังก์ชัน ส่วนจุดทึบแสดงค่าที่จุด



ตัวอย่าง 1 ให้ $f(x) = x + 3$ เมื่อ $x \neq 2$ และ $f(2) = 1$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ และ $f(2)$

วิธีคิด ค่าฟังก์ชันใกล้ 2 ใช้ $x + 3$ จึงเข้าใกล้ 5 จากทั้งสองด้าน แต่ค่าที่จุดกำหนดแยกเป็น 1

ตอบ ลิมิต 5 และค่าที่จุด 1

1.2 สมบัติลิมิตและการแยกตัวประกอบ

ถ้า $f(x) \rightarrow A$ และ $g(x) \rightarrow B$ สามารถหาลิมิตของผลบวก ผลต่าง และผลคูณได้จากลิมิตของแต่ละส่วน ส่วนผลหารต้องมี $B \neq 0$ หากแทนตรงได้ $\frac{0}{0}$ ให้จัดรูปก่อน รูปนี้มีใช้คำตอบและไม่ได้แปลว่าไม่มีลิมิต

หลักการและสูตร

$$\lim(cf \pm g) = cA \pm B, \quad \lim fg = AB, \quad \lim \frac{f}{g} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

$$x^m - a^m = (x - a) \sum_{j=0}^{m-1} x^{m-1-j} a^j \quad (m \in \mathbb{N})$$

ตัดได้เฉพาะตัวประกอบร่วม และลดรูปสำหรับ $x \neq a$ ในบริเวณใกล้จุด

ตัวอย่าง 2 จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

วิธีคิด แยกตัวประกอบได้

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2} \quad (x \neq 3)$$

ตัวส่วนใหม่มีลิมิต $5 \neq 0$ จึงได้ $\frac{6}{5}$

ตอบ $\frac{6}{5}$

1.3 ลิมิตที่มีกรณธ์

เมื่อผลต่างกรณธ์ทำให้แทนตรงเป็น $\frac{0}{0}$ ให้คูณสังยุคเพื่อใช้ผลต่างกำลังสอง คงเงื่อนไขที่กรณธ์นิยามและค่าที่ตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

หลักการและสูตร

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$$

ตัวอย่าง 3 จงหา $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - 4}{x-4}$

วิธีคิด คูณสังยุคได้

$$\frac{3x+4-16}{(x-4)(\sqrt{3x+4}+4)} = \frac{3}{\sqrt{3x+4}+4} \quad (x \neq 4)$$

แทน $x = 4$ ในนิพจน์ใหม่ได้ $\frac{3}{8}$

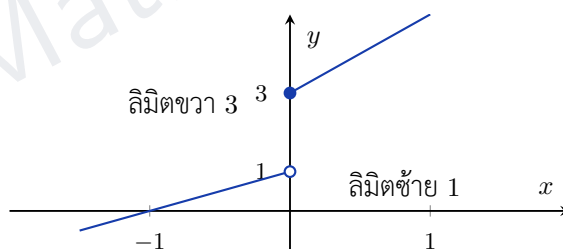
ตอบ $\frac{3}{8}$

1.4 ฟังก์ชันแบ่งช่วงและฟังก์ชันประกอบ

เลือกสูตรตามด้านที่ตัวแปรเข้าใกล้ก่อนแทนค่า ในฟังก์ชันประกอบต้องติดตามด้านของค่าภายในด้วย เช่น $x \rightarrow 0^-$ ทำให้ $x^2 \rightarrow 0^+$ ลิมิตของนิพจน์รวมอาจมีอยู่แม้อิมิตของแต่ละส่วนไม่มีอยู่

หลักการและสูตร

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ ใช้สูตรบนด้าน } x < a, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ ใช้สูตรบนด้าน } x > a$$



ตัวอย่าง 4 ให้ $f(t) = 2t + 1$ เมื่อ $t < 0$ และ $f(t) = t + 4$ เมื่อ $t > 0$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2)$

วิธีคิด เมื่อ $x \neq 0$ มี $x^2 > 0$ จึงต้องเลือกสูตร $t + 4$ แม้ x เข้าใกล้จากด้านซ้าย ได้ $f(x^2) = x^2 + 4 \rightarrow 4$

ตอบ 4

1.5 ความต่อเนื่องที่จุดและบนช่วง

ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a ต้องมีค่าที่จุด มีลิมิตจำกัด และค่าทั้งสองเท่ากัน บนช่วงปิด $[a, b]$ ตรวจสอบภายในตามปกติและใช้ลิมิตจากภายในช่วงที่ปลายทั้งสอง

หลักการและสูตร

$$\begin{aligned} f(a) \text{ นิยามได้,} & \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), & \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5 ให้ $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 1 \\ k, & x = 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$ จงหา k ที่ทำให้ต่อเนื่องที่ 1

วิธีคิด ลิมิตซ้ายเป็น $1 + 2 = 3$ และขวาเป็น $2(1) + 1 = 3$ จึงต้องกำหนดค่าที่จุด $k = 3$

ตอบ $k = 3$

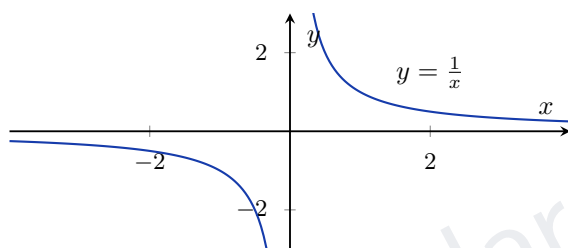
1.6 ลิมิตอนันต์และลิมิตที่อนันต์

ลิมิตอนันต์บอกค่าฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขต ส่วนลิมิตเมื่อ $x \rightarrow \pm\infty$ บอกพฤติกรรมปลายกราฟ อนันต์มิใช่จำนวนจริงที่นำไปแทนตรงได้ สำหรับเศษส่วนพหุนามให้เปรียบเทียบดีกรีและสัมประสิทธิ์นำ

หลักการและสูตร

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

ดีกรีเศษน้อยกว่าส่วนให้ลิมิตศูนย์ เท่ากันให้ผลหารสัมประสิทธิ์นำ มากกว่าให้ตรวจเครื่องหมายของพจน์นำตามทิศ $+\infty$ หรือ $-\infty$



ตัวอย่าง 6 จงหา $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x + 1}{2x^2 + 3}$

วิธีคิด หารด้วย x^2 ได้ $\frac{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}}$ ซึ่งมีลิมิต $\frac{4}{2} = 2$

ตอบ 2

1.7 กรณณ์เมื่อเข้าสู่นันต์

นำตัวแปรออกจากรากที่สองด้วยค่าสัมบูรณ์ โดย $\sqrt{x^2} = |x|$ ด้านลบจึงต้องใช้ $|x| = -x$ ผลต่างกรณณ์ที่ใช้
 สังยุคก่อนหาลิมิต

หลักการและสูตร

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 7 จงหา $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 2}{\sqrt{9x^2 + 4}}$

วิธีคิด เมื่อ $x < 0$ ตัวส่วนเป็น $-x\sqrt{9 + \frac{4}{x^2}}$ จึง

$$\frac{5x + 2}{\sqrt{9x^2 + 4}} = -\frac{5 + \frac{2}{x}}{\sqrt{9 + \frac{4}{x^2}}} \rightarrow -\frac{5}{3}$$

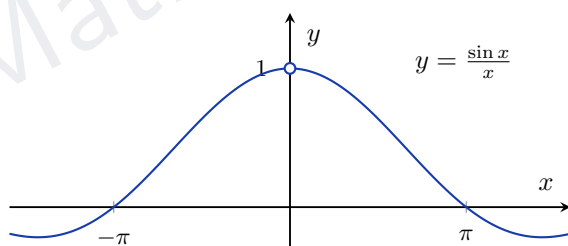
ตอบ $-\frac{5}{3}$

1.8 ลิมิตตรีโกณมิติ

สูตรมาตรฐานใช้มุมหน่วยเรเดียน จัดอาร์กิวเมนต์ของไซน์หรือแทนเจนต์ให้ตรงกับตัวส่วน อาจใช้เอกลักษณ์ก่อนเพื่อเปลี่ยนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

หลักการและสูตร

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1, \quad 1 - \cos u = 2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$$



ตัวอย่าง 8 จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(6x)}{x^2}$ เมื่อมุมเป็นเรเดียน

วิธีคิด ใช้ $1 - \cos(6x) = 2 \sin^2(3x)$ จึง

$$\frac{1 - \cos(6x)}{x^2} = 18 \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \right)^2 \rightarrow 18$$

ตอบ 18

สรุป

แยกลิมิตออกจากค่าที่จุด ตรวจสอบด้านและโดเมนก่อนแทนค่า ใช้การจัดรูปเมื่อได้ $\frac{0}{0}$ รักษาเครื่องหมายของค่าสัมบูรณ์ที่อนันต์ และใช้เรเดียนในลิมิตตรีโกณมิติ

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

แบบฝึกหัดตอนที่ 1

ง่าย

ข้อ 1 จงหา $\lim_{x \rightarrow 2}(3x^2 - x + 1)$

ตอบ

ข้อ 2 ให้ $f(x) = 2x + 1$ เมื่อ $x \neq 1$ และ $f(1) = 0$ จงหาลิมิตที่ 1 และค่าที่จุด

ตอบ

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

ตอนที่ 3 เรขาคณิตและพฤติกรรมของฟังก์ชัน

เป้าหมาย ใช้ออนุพันธ์วิเคราะห์เส้นสัมผัส การเพิ่มลด ค่าสุดขีด และย้อนหาฟังก์ชันจากเงื่อนไข

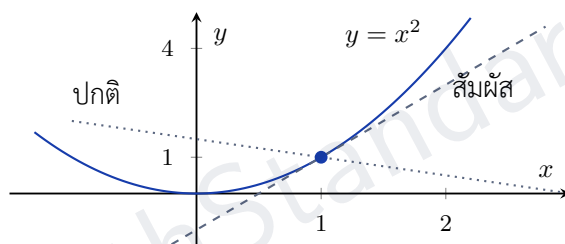
3.1 เส้นสัมผัส

ที่จุด $(a, f(a))$ ซึ่งมีอนุพันธ์จำกัด ความชันเส้นสัมผัสคือ $f'(a)$ เส้นสัมผัสที่ทราบสมการให้ข้อมูลทั้งค่าฟังก์ชันและอนุพันธ์

หลักการและสูตร

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y = mx + b \text{ สัมผัสที่ } x = a \implies f'(a) = m, \quad f(a) = ma + b$$



ตัวอย่าง 17 หาเส้นสัมผัส $y = x^2 - 2x + 3$ ที่ $x = 3$

วิธีคิด จุดสัมผัสคือ $(3, 6)$ และอนุพันธ์ $2x - 2$ มีค่า 4 จึง $y - 6 = 4(x - 3)$ หรือ $y = 4x - 6$

ตอบ $y = 4x - 6$

3.2 เส้นปกติและกรณีเส้นสัมผัสแนวนอน

เส้นปกติผ่านจุดสัมผัสและตั้งฉากกับเส้นสัมผัส หากความชันเส้นสัมผัสไม่เป็นศูนย์ ความชันเส้นปกติเป็นส่วนกลับติดลบ ถ้าเส้นสัมผัสแนวนอน เส้นปกติเป็นเส้นตั้ง

หลักการและสูตร

$$m_N = -\frac{1}{f'(a)} \quad (f'(a) \neq 0), \quad y - f(a) = m_N(x - a)$$

$$f'(a) = 0 \implies \text{เส้นปกติ } x = a$$

ระยะจากจุด (x_0, y_0) ถึงเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ ใช้

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (A^2 + B^2 > 0)$$

ตัวอย่าง 18 หาเส้นปกติของ $y = x^2$ ที่ $(1, 1)$

วิธีคิด ความชันเส้นสัมผัส $2x$ ที่ 1 เท่ากับ 2 ความชันเส้นปกติ $-\frac{1}{2}$ จึง $y-1 = -\frac{x-1}{2}$ หรือ $x+2y-3 = 0$

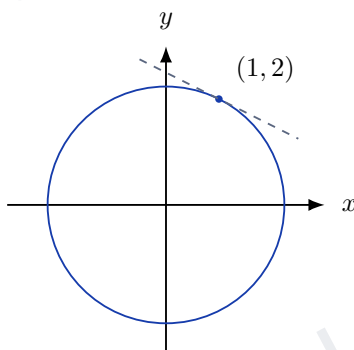
ตอบ $x + 2y - 3 = 0$

3.3 อนุพันธ์แฝง

เมื่อสมการไม่แยก y ให้ถือว่า $y = y(x)$ ในบริเวณที่ทำให้ พจน์ที่มี y ต้องใช้กฎลูกโซ่ เช่น $(y^m)' = my^{m-1}y'$ หลังจัดรูปต้องตรวจสอบตัวส่วนที่หาร

หลักการและสูตร

$$\frac{d}{dx}(xy) = y + xy', \quad x^2 + y^2 = R^2 \implies y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$



$$x^2 + y^2 = 5 \text{ ใช้ } y' = -\frac{x}{y} \text{ เมื่อ } y \neq 0$$

ตัวอย่าง 19 บนเส้นโค้ง $x^2 + 2y^2 = 9$ จงหาความชันที่ $(1, 2)$

วิธีคิด จุดอยู่บนกราฟเพราะ $1 + 2(4) = 9$ หาอนุพันธ์ $2x + 4yy' = 0$ จึง $y' = -\frac{x}{2y}$ ที่ $(1, 2)$ ให้ $-\frac{1}{4}$

ตอบ $-\frac{1}{4}$

3.4 อนุพันธ์แฝงอันดับสอง

หาอนุพันธ์สมการอันดับหนึ่งอีกครั้ง โดย y' เป็นฟังก์ชันของ x เช่นกัน จึงมีทั้งพจน์ $(y')^2$ และ yy'' การแทนค่าทำหลังทราบ y' ที่จุดนั้น

หลักการและสูตร

$$x^2 + y^2 = R^2 \implies 1 + (y')^2 + yy'' = 0$$

ตัวอย่าง 20 บนวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ จงหา y' และ y'' ที่ $(3, 4)$

วิธีคิด $y' = -\frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$ และ

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1 + \frac{9}{16}}{4} = -\frac{25}{64}$$

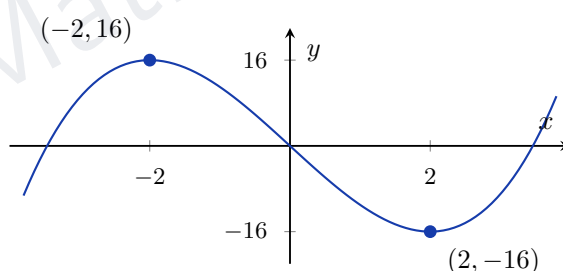
ตอบ $y' = -\frac{3}{4}, y'' = -\frac{25}{64}$

3.5 ฟังก์ชันเพิ่มลดและค่าวิกฤต

ค่าวิกฤตคือค่าภายในโดเมนที่อนุพันธ์เป็นศูนย์หรือไม่มีอนุพันธ์ ใช้จุดเหล่านี้แบ่งช่วงแล้วตรวจสอบเครื่องหมาย f' เงื่อนไข $f'(c) = 0$ เพียงอย่างเดียวยังไม่ระบุว่ามีความสำคัญ

หลักการและสูตร

$$f' > 0 \Rightarrow f \text{ เพิ่ม}, \quad f' < 0 \Rightarrow f \text{ ลด}$$



ตัวอย่าง 21 จงหาช่วงเพิ่มและลดของ $f(x) = x^3 - 12x$

วิธีคิด $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$ มีเครื่องหมายบวกเมื่อ $x < -2$ หรือ $x > 2$ และลบเมื่อ $-2 < x < 2$

ตอบ เพิ่มบน $(-\infty, -2), (2, \infty)$ ลดบน $(-2, 2)$

3.6 ค่าสุดขีดสัมพัทธ์และเกณฑ์อันดับสอง

อนุพันธ์เปลี่ยนจาก บวก เป็น ลบ ให้ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เปลี่ยนจาก ลบ เป็น บวก ให้ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หาก $f'(c) = 0$ และ $f''(c) \neq 0$ ใช้เกณฑ์อันดับสองได้ แต่ $f''(c) = 0$ ยังสรุปไม่ได้

หลักการและสูตร

$$f''(c) < 0 \Rightarrow \text{สูงสุดสัมพัทธ์}, \quad f''(c) > 0 \Rightarrow \text{ต่ำสุดสัมพัทธ์}$$

ตำแหน่งคือ c ค่าคือ $f(c)$ และจุดคือ $(c, f(c))$ ต้องตอบให้ตรงคำถาม

ตัวอย่าง 22 จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^3 - 3x + 2$

วิธีคิด $f' = 3(x-1)(x+1)$ และ $f'' = 6x$ ที่ $x = -1$ อันดับสองเป็นลบ ให้ค่าสูงสุด $f(-1) = 4$ ที่ $x = 1$ อันดับสองเป็นบวก ให้ค่าต่ำสุด $f(1) = 0$

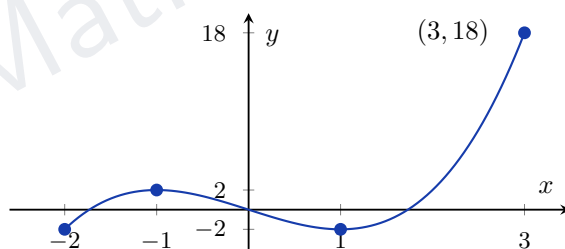
ตอบ สูงสุดสัมพัทธ์ 4 ที่ $x = -1$ ต่ำสุดสัมพัทธ์ 0 ที่ $x = 1$

3.7 ค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนช่วงปิด

ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดมีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ หาโดยเปรียบเทียบค่าฟังก์ชันที่ปลายช่วงและค่าวิกฤตภายในช่วงทุกค่า ซึ่งรวมจุดที่ไม่มีอนุพันธ์ด้วย

หลักการและสูตร

$$\text{ค่าที่ต้องเทียบ} = \{f(a), f(b), f(c_1), \dots, f(c_m)\}$$



ตัวอย่าง 23 หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $f(x) = x^3 - 3x$ บน $[-2, 3]$

วิธีคิด ค่าวิกฤตคือ $-1, 1$ อยู่ในช่วง ตรวจสอบ $f(-2) = -2, f(-1) = 2, f(1) = -2, f(3) = 18$ จึงสูงสุด 18 ที่ 3 และต่ำสุด -2 ที่ $-2, 1$

ตอบ สูงสุด 18 ต่ำสุด -2

3.8 ย้อนหาพหุนามจากข้อมูล

กำหนดสัมประสิทธิ์ตามดีกรี แปลข้อมูลผ่านจุดเป็น $f(u) = v$ เศษเหลือจากการหารด้วย $x - u$ เป็น $f(u)$ และความชันเป็น $f'(u)$ หากทราบจุดวิกฤตสองตำแหน่งของพหุนามดีกรีสาม อาจตั้งอนุพันธ์จากตัวประกอบแล้วเทียบสัมประสิทธิ์

หลักการและสูตร

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(u) = f'(v) = 0 \implies f'(x) = k(x - u)(x - v) \quad (u \neq v, k \neq 0)$$

ตัวอย่าง 24 ให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ มีค่าวิกฤตที่ 1, 3 และ $f(0) = 2$ จงหา a, b, c

วิธีคิด อนุพันธ์มีสัมประสิทธิ์นำ 3 จึง $f' = 3(x - 1)(x - 3) = 3x^2 - 12x + 9$ เทียบกับ $3x^2 + 2ax + b$ ให้ $a = -6, b = 9$ และ $c = f(0) = 2$

ตอบ $a = -6, b = 9, c = 2$

สรุป

เส้นสัมผัสใช้ค่าฟังก์ชันร่วมกับอนุพันธ์ เส้นปกติแยกกรณีแนวนอน ตรวจสอบเครื่องหมายอนุพันธ์ก่อนสรุปค่าสุดขีด และเทียบปลายช่วงทุกครั้งในปัญหามนช่วงปิด

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

แบบฝึกหัดตอนที่ 3

ง่าย

ข้อ 41 หาเส้นสัมผัส $y = x^2 + 1$ ที่ $x = 2$

ตอบ

ข้อ 42 หาเส้นปกติ $y = x^2$ ที่ $(2, 4)$

ตอบ