



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

www.mathstandard.com

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.2

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว มุ่งพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการวัดรูปเรขาคณิตสามมิติ การเลือกฐานและความสูง การอ่านหน้าตัดและรูปคลี่ ตลอดจนความสัมพันธ์ระหว่างความยาว พื้นที่ และปริมาตร

เนื้อหาเริ่มจากปริซึมและทรงกระบอก แล้วขยายไปสู่พีระมิด กรวย กรวยตัด ทรงกลม และรูปทรงประกอบ เชื่อมโยงความคล้ายและพีทาโกรัสกับการหาพื้นที่ไม่ทราบ รวมทั้งการแทนที่น้ำ การถ่ายน้ำ อัตราการไหล การหลอมวัสดุ และพื้นที่ส่วนร่วมที่นำไปใช้หาปริมาตร

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง ผู้เรียนควรมีพื้นฐานพื้นที่ของรูปเรขาคณิต อัตราส่วน ร้อยละ สมการ กรณธ์ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และความคล้าย

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- ใช้อักษรพิมพ์ใหญ่แทนชื่อจุด และใช้ AB แทนความยาวส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ เมื่อปรากฏในสมการ
- ในสามเหลี่ยม ABC เมื่อใช้ด้าน a, b, c ให้ $a = BC, b = CA, c = AB$ ซึ่งอยู่ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ
- ใช้ Area แทนพื้นที่ และระบุชื่อรูปเมื่อเปรียบเทียบหลายรูป ตัวแปรอื่นให้ความหมายตามที่กำหนดในแต่ละหัวข้อหรือตัวอย่าง
- ใช้ V แทนปริมาตร S แทนพื้นที่ผิว และ B แทนพื้นที่ฐาน ส่วนความสูงหมายถึงระยะตั้งฉากกับระนาบฐาน เว้นแต่ระบุว่าเป็นสูงเอียง
- ใช้หน่วยที่สอดคล้องกัน และตอบด้วยค่าที่แน่นอน เช่น π หรือกรณธ์ เว้นแต่โจทย์ระบุให้ประมาณค่า
- ความยาวเป็นบวก รูปประกอบแสดงตำแหน่งและความสัมพันธ์ ไม่ใช้การวัดจากรูปแทนข้อมูลที่กำหนดและเหตุผลทางคณิตศาสตร์

เรียบเรียงโดย MathStandard สำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

สารบัญ

ตอนที่ 1 ปริซึมและทรงกระบอก

เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–12	10

ตอนที่ 2 การตัดและเปลี่ยนขนาดรูปทรง

เนื้อหาและตัวอย่าง	17
แบบฝึกหัดข้อ 13–22	23

ตอนที่ 3 ปริมาตรพีระมิด

เนื้อหาและตัวอย่าง	31
แบบฝึกหัดข้อ 23–35	37

ตอนที่ 4 พื้นที่ผิวพีระมิด

เนื้อหาและตัวอย่าง	46
แบบฝึกหัดข้อ 36–45	51

ตอนที่ 5 กรวยและกรวยตัด

เนื้อหาและตัวอย่าง	58
แบบฝึกหัดข้อ 46–56	66

ตอนที่ 6 ทรงกลมและครึ่งทรงกลม

เนื้อหาและตัวอย่าง	73
แบบฝึกหัดข้อ 57–66	79

เรื่อง ปริมาตรและพื้นที่ผิว

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 ระดับน้ำและอัตราการไหล

เนื้อหาและตัวอย่าง	86
แบบฝึกหัดข้อ 67–77	91

ตอนที่ 8 รูปทรงประกอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	98
แบบฝึกหัดข้อ 78–88	104

ตอนที่ 9 ส่วนร่วมของรูปและร่องโค้ง

เนื้อหาและตัวอย่าง	110
แบบฝึกหัดข้อ 89–99	116
เฉลยคำตอบ	127
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	132

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

ปริซึมและทรงกระบอก

1.1 ปริมาตร พื้นที่ผิว และหน่วย

ปริมาตรเป็นขนาดของบริเวณในสามมิติ ส่วนพื้นที่ผิวเป็นผลรวมพื้นที่ของผิวที่ล้อมรูปทรง ปริมาตรจึงใช้หน่วยลูกบาศก์ ขณะที่พื้นที่ผิวใช้หน่วยตาราง การเปลี่ยนหน่วยต้องยกกำลังตามชนิดของปริมาณ

การแปลงหน่วยที่ใช้บ่อย

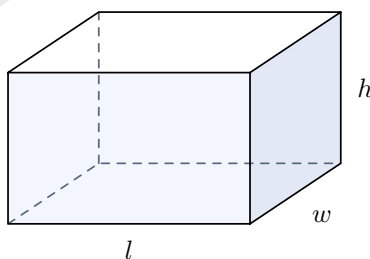
$$1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2, \quad 1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ L} = 1,000 \text{ cm}^3, \quad 1 \text{ m}^3 = 1,000 \text{ L}, \quad 1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$$

เมื่อความยาว 1 หน่วยใหญ่เท่ากับ k หน่วยเล็ก พื้นที่ 1 หน่วยใหญ่เท่ากับ k^2 หน่วยเล็ก และปริมาตรเท่ากับ k^3 หน่วยเล็ก

1.2 พื้นที่ฐานและความสูงตั้งฉาก

ให้ B แทนพื้นที่ฐาน และ h แทนระยะตั้งฉากระหว่างระนาบฐานทั้งสอง ปริซึมมีหน้าตัดขนานฐานที่เท่ากันตลอดความสูง จึงมีปริมาตรเท่ากับพื้นที่ฐานคูณความสูง ทรงกระบอกมีหลักการเดียวกันโดยฐานเป็นวงกลม



ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากมีฐานยาว l กว้าง w และสูง h

ปริมาตรปริซึมและทรงกระบอกเขียนเป็น $V = Bh$ โดย V คือปริมาตร และหน่วยของ B, h ต้องสอดคล้องกัน

ตัวอย่าง 1 กล่องมีขนาดภายใน $20 \times 30 \times 40$ เซนติเมตร จงหาความจุเป็นลิตร

วิธีคิด พื้นที่ฐาน $20(30) = 600$ ตารางเซนติเมตร ปริมาตร $600(40) = 24,000$ ลูกบาศก์เซนติเมตร จาก 1 ลิตรเท่ากับ 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร จึงมีความจุ $24,000/1,000 = 24$ ลิตร

ตอบ 24 ลิตร

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ปริซึมและทรงกระบอก

1.3 ปริซึมตรงและรูปคลี่

ปริซึม ตรง มี สันข้าง ตั้งฉาก กับ ฐาน หน้าข้าง แต่ละ หน้า เป็น สี่เหลี่ยม ผืนผ้า เมื่อ คลี่ หน้าข้าง ทั้งหมด ความกว้างรวมเท่ากับความยาวรอบรูปฐาน และความสูงเท่ากับความสูงปริซึม

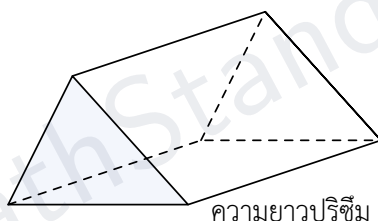
ปริมาตรและพื้นที่ผิวปริซึมตรง

ให้ V เป็นปริมาตร S เป็นพื้นที่ผิว P เป็นความยาวรอบรูปฐาน B เป็นพื้นที่ฐาน และ h เป็นความสูงตั้งฉาก

$$V = Bh, \quad S_{\text{ข้าง}} = Ph, \quad S_{\text{ทั้งหมด}} = Ph + 2B$$

สำหรับปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง w ยาว l สูง h

$$V = lwh, \quad S_{\text{ทั้งหมด}} = 2(lw + lh + wh)$$



ฐานอาจเป็นรูปหลายเหลี่ยมชนิดใดก็ได้

ตัวอย่าง 2 ปริซึมตรงมีฐานเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้าน 6, 8, 10 เซนติเมตร และยาว 15 เซนติเมตร จงหาปริมาตรและพื้นที่ผิวทั้งหมด

วิธีคิด พื้นที่ฐาน $B = \frac{1}{2}(6)(8) = 24$ และความยาวรอบรูปฐาน $P = 6 + 8 + 10 = 24$ ให้ความยาวปริซึมเป็น $h = 15$ จึงมีปริมาตร $V = 24(15) = 360$ ลูกบาศก์เซนติเมตร และพื้นที่ผิวทั้งหมด $S = 24(15) + 2(24) = 408$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ ปริมาตร 360 ลูกบาศก์เซนติเมตร และพื้นที่ผิว 408 ตารางเซนติเมตร

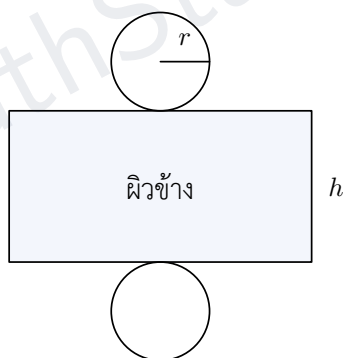
สูตรพื้นที่ผิวข้าง Ph ใช้กับปริซึมตรง สำหรับปริซึมเอียงต้องหาพื้นที่หน้าข้างจากขนาดของแต่ละหน้า

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ปริซึมและทรงกระบอก

1.4 ทรงกระบอกกลมตรง

ฐานของทรงกระบอกเป็นวงกลมสองวงที่เท่ากัน ผิวโค้งเมื่อคลี่บนระนาบเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งยาว $2\pi r$ และสูง h โดย r คือรัศมีฐาน และ h คือความสูงตั้งฉาก



$$\text{ความกว้างผิวข้าง} = 2\pi r$$

รูปคลี่ประกอบด้วยผิวข้างหนึ่งรูปและฐานวงกลมสองรูป

สูตรทรงกระบอกกลมตรง

ให้ V แทนปริมาตร และ S แทนพื้นที่ผิวตามส่วนที่ระบุ

$$V = \pi r^2 h, \quad S_{\text{ข้าง}} = 2\pi r h$$

$$S_{\text{ทั้งหมด}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

ตัวอย่าง 3 ทรงกระบอกตันรัศมี 3 หน่วย สูง 7 หน่วย จงหาปริมาตรและพื้นที่ผิวทั้งหมด

วิธีคิด ให้รัศมี $r = 3$ และความสูง $h = 7$ จะได้ปริมาตร $V = \pi(3)^2(7) = 63\pi$ และพื้นที่ผิวทั้งหมด $S = 2\pi(3)(7) + 2\pi(3)^2 = 60\pi$

ตอบ ปริมาตร 63π ลูกบาศก์หน่วย และพื้นที่ผิว 60π ตารางหน่วย

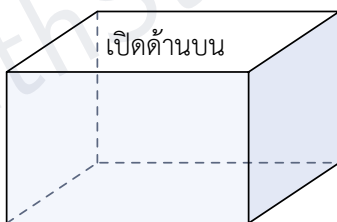
หากโจทย์ให้เส้นผ่านศูนย์กลาง ต้องหารด้วย 2 เพื่อหารัศมีก่อนแทนค่า และไม่ควรประมาณค่า π ก่อนสิ้นสุดการคำนวณ

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ปริซึมและทรงกระบอก

1.5 ภาชนะเปิดและพื้นที่วัสดุ

พื้นที่วัสดุขึ้นอยู่กับผิวที่มีอยู่จริง ภาชนะเปิดด้านบนไม่รวมผาบน ส่วนการเคลือบเฉพาะด้านนอกต้องไม่รวมผิวด้านใน เว้นแต่โจทย์กำหนดไว้ หากไม่ระบุความหนา ให้ใช้แบบจำลองผิวบางตามข้อมูลของโจทย์



กล่องเปิดด้านบนมีพื้นที่หนึ่งหน้าและผนังสี่หน้า

สูตรสำหรับภาชนะผิวบางที่เปิดด้านบน

ให้ S แทนพื้นที่วัสดุที่ใช้ทำภาชนะ กล่องกว้าง w ยาว l สูง h

$$S = lw + 2lh + 2wh$$

ถังทรงกระบอกรัศมี r สูง h

$$S = \pi r^2 + 2\pi rh$$

ตัวอย่าง 4 ถังไม่มีฝาทรงกระบอกรัศมีภายใน 4 เซนติเมตร สูง 9 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวด้านในที่ต้องเคลือบ รวมกันถึง

วิธีคิด ผิวที่ต้องเคลือบคือผนังด้านในและก้นถัง ให้รัศมี $r = 4$ และความสูง $h = 9$ ได้พื้นที่ $2\pi(4)(9) + \pi 4^2 = 88\pi$ ตารางเซนติเมตร

ตอบ 88π ตารางเซนติเมตร

1.6 ปริมาตรจากลูกบาศก์หน่วย

เมื่อรูปทรงประกอบด้วยลูกบาศก์เท่ากันที่ไม่ซ้อนทับกัน ปริมาตรรวมเท่ากับจำนวนลูกคูณปริมาตรต่อลูก การอ่านภาพด้านบนที่บอกความสูงแต่ละช่อง ให้รวมจำนวนลูกในทุกช่องก่อน

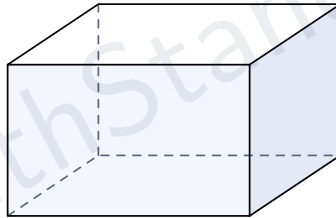
$$V = Na^3$$

โดย V คือปริมาตรรวม N คือจำนวนลูกบาศก์ และ a คือความยาวสันของแต่ละลูก

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-2

ปริซึมและทรงกระบอก

ข้อ 1 กล่องเก็บตัวอย่างมีขนาดภายในกว้าง 8 เซนติเมตร ยาว 15 เซนติเมตร และสูง 10 เซนติเมตร จงหาความจุ



ตอบ _____

ข้อ 2 กล่องบรรจุภัณฑ์ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีขนาด $6 \times 10 \times 8$ เซนติเมตร ต้องการหุ้มครบทั้งหกหน้า จงหาพื้นที่วัสดุ โดยไม่คิดส่วนซ้อนทับและความหนา

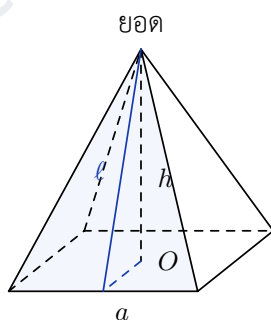
ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4

พื้นที่ผิวพีระมิด

4.1 ความสูงตั้งฉาก สูงเอียง และสันข้าง

ความยาวทั้งสามมีบทบาทต่างกัน ความสูงตั้งฉากวัดจากยอดถึงระนาบฐาน ใช้หาปริมาตร สูงเอียงเป็นความสูงของหน้าสามเหลี่ยม ใช้หาพื้นที่หน้าข้าง ส่วนสันข้างเชื่อมยอดกับมุมฐาน ต้องแยกให้ชัดก่อนแทนสูตร



h ใช้หาปริมาตร ส่วน l ใช้หาพื้นที่หน้าข้าง

พีระมิดตรงฐานจัตุรัส

ให้ด้านฐานยาว a ความสูงตั้งฉาก h สูงเอียง l และสันข้าง e โดย S แทนพื้นที่ผิวตามส่วนที่ระบุ และ O เป็นศูนย์กลางฐานในภาพ

$$l^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}, \quad e^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$S_{\text{ข้าง}} = 2al, \quad S_{\text{ทั้งหมด}} = a^2 + 2al$$

ตัวอย่าง 19 พีระมิดตรงฐานจัตุรัสด้าน 6 หน่วย สูงตั้งฉาก 4 หน่วย จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมด

วิธีคิด ให้ด้านฐาน $a = 6$ และความสูงตั้งฉาก $h = 4$ ได้สูงเอียง $l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ พื้นที่ผิวข้าง $2(6)(5) = 60$ และฐาน $6^2 = 36$ รวม 96

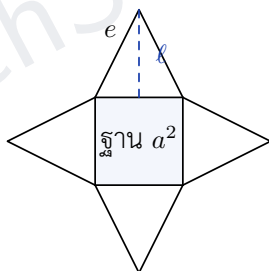
ตอบ 96 ตารางหน่วย

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

พื้นที่ผิวพีระมิด

4.2 รูปคลี่และพื้นที่ผิว

รูปคลี่พีระมิดประกอบด้วยรูปฐานและหน้าสามเหลี่ยมทุกหน้า ถ้าหน้าข้างเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วและทราบสันข้าง ต้องลากความสูงแบ่งฐานของหน้าออกเป็นสองส่วนเท่ากันก่อน



ความสูงของหน้าสามเหลี่ยมคือ l และด้านเอียงของหน้านั้นคือ e

จากสันข้างไปสู่สูงเอียง

สำหรับพีระมิดตรงฐานจัตุรัสด้าน a สันข้าง e และสูงเอียง l

$$l = \sqrt{e^2 - (a/2)^2}$$

ถ้าต้องใช้วัสดุ N ชิ้น พื้นที่รวมเท่ากับ N คูณพื้นที่ต่อชิ้น โดยตรวจว่ารวมฐานหรือไม่

ตัวอย่าง 20 รูปคลี่มีจัตุรัสด้าน 8 เซนติเมตรและหน้าสามเหลี่ยมสี่หน้าที่มีสันข้างยาว 5 เซนติเมตร จงหาพื้นที่รูปคลี่

วิธีคิด สูงเอียงของหน้าแต่ละรูปคือ $l = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ พื้นที่สามเหลี่ยมหนึ่งหน้า $\frac{1}{2}(8)(3) = 12$ จึงได้พื้นที่รวม $8^2 + 4(12) = 112$

ตอบ 112 ตารางเซนติเมตร

4.3 ย้อนหาความสูงจากพื้นที่ผิว

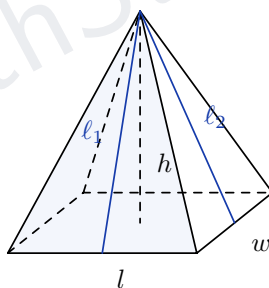
ถ้าทราบพื้นที่ผิวทั้งหมดและขนาดฐาน ให้ลบพื้นที่ฐานเพื่อหาพื้นที่ผิวข้าง แล้วแก้สมการหาสูงเอียง สุดท้ายใช้พีทาโกรัสหาความสูงตั้งฉาก ไม่ใช่สูงเอียงแทนความสูงพีระมิด

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

พื้นที่ผิวพีระมิด

4.4 พีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า

หน้าข้างที่ตรงข้ามกันมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ แต่หน้าที่มีฐานยาวต่างกันมักมีสูงเอียงต่างกัน จุดตั้งฉากจากยอดอยู่ที่ศูนย์กลางฐาน ระยะจากศูนย์กลางถึงแต่ละด้านเท่ากับครึ่งหนึ่งของมิติที่ตั้งฉากกับด้านนั้น



l_1 เป็นสูงเอียงของหน้าฐานยาว l และ l_2 ของหน้าฐานยาว w

แยกสูงเอียงสองชนิด

ให้ฐานกว้าง w ยาว l และสูงตั้งฉาก h โดย $S_{\text{ทั้งหมด}}$ แทนพื้นที่ผิวรวมฐาน

$$l_1 = \sqrt{h^2 + (w/2)^2}, \quad l_2 = \sqrt{h^2 + (l/2)^2}$$

$$S_{\text{ทั้งหมด}} = lw + ll_1 + wl_2$$

ตัวอย่าง 21 พีระมิดตรงฐาน 6×16 หน่วย สูง 4 หน่วย จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมด

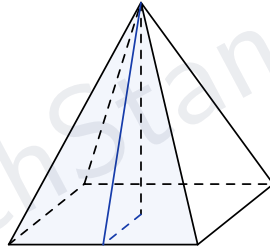
วิธีคิด ให้ฐานกว้าง $w = 6$ ยาว $l = 16$ และความสูงตั้งฉาก $h = 4$ สูงเอียงของหน้าที่มีฐานยาว 16 หน่วย คือ $l_1 = \sqrt{16 + 9} = 5$ ส่วนสูงเอียงของหน้าที่มีฐานยาว 6 หน่วยคือ $l_2 = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$ รวมพื้นที่ $6(16) + 16(5) + 6(4\sqrt{5}) = 176 + 24\sqrt{5}$

ตอบ $176 + 24\sqrt{5}$ ตารางหน่วย

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 4 | ข้อ 36-37

พื้นที่ผิวพีระมิด

ข้อ 36 พีระมิดตรงฐานจัตุรัสยาวด้านละ 12 หน่วย มีสูงเอียง 10 หน่วย จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมด



ตอบ _____

ข้อ 37 ทำแบบจำลองพีระมิดตรงฐานจัตุรัส 8 ชั้น แต่ละชั้นมีด้านฐาน 10 เซนติเมตร และสูงเอียง 13 เซนติเมตร ต้องปิดทุกหน้ารวมฐานด้วยวัสดุราคา 5 บาทต่อ 100 ตารางเซนติเมตร จงหาค่าวัสดุโดยไม่คิดเศษตัด

ตอบ _____