



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง การแปรผัน

เรื่อง การแปรผัน

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.3

เอกสาร ประกอบการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การแปรผัน มุ่งพัฒนา ความเข้าใจ ความสัมพันธ์ ระหว่าง ปริมาณ โดยใช้สมการ ตาราง และกราฟเป็นเครื่องมืออธิบายการเปลี่ยนแปลงอย่างมีเหตุผล

เนื้อหาครอบคลุมการแปรผันตรง การแปรผกผัน การแปรผันเกี่ยวเนื่อง การแปรผันรวม การประยุกต์กับ เวลาและระยะทาง ตลอดจนผลบวกของปริมาณที่มีกฎการแปรผันต่างกัน ให้ความสำคัญกับความหมาย ของค่าคงตัว เงื่อนไขของตัวแปร หน่วยของปริมาณ และการตรวจสอบความสอดคล้องของคำตอบ

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การ ประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง โดยเชื่อมโยงอัตราส่วน ร้อยละ เลขยกกำลัง กรณฑ์ เรขาคณิต และระบบสมการ ผู้เรียนควรมีพื้นฐานการคำนวณจำนวนจริงและการแก้สมการเชิงเส้น

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- สัญลักษณ์ $\propto$ หมายถึงการแปรผันตรงกับนิพจน์ที่ระบุ และ k แทนค่าคงตัวของการแปรผัน โดย $k \neq 0$
- ค่าคงตัวใช้กับความสัมพันธ์และหน่วยที่กำหนด การเปลี่ยนหน่วยอาจทำให้ค่าตัวเลขของค่าคงตัว เปลี่ยนไป
- ตัวแปรพิจารณาในระบบจำนวนจริง โดยตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ และปริมาณได้กรณีอันดับคู่ต้องไม่เป็นลบ
- ปริมาณทางกายภาพ เช่น เวลา ความยาว และมวล ใช้ค่าที่สอดคล้องกับสถานการณ์และหน่วยเดียวกัน ในการเปรียบเทียบ
- แบบจำลองในโจทย์ใช้ภายใต้เงื่อนไขที่ระบุ เช่น อัตราการทำงานเท่ากัน ปริมาณวัสดุคงเดิม หรือสภาวะ การทดลองเดียวกัน
- คำตอบใช้ค่าที่แน่นอน เว้นแต่โจทย์กำหนดให้ประมาณค่า และแยกค่าใหม่ออกจากปริมาณที่เพิ่มขึ้น หรือลดลง

เรียบเรียงโดย MathStandard สำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง การแปรผัน

สารบัญ

ตอนที่ 1 การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

เนื้อหาและตัวอย่าง	3
แบบฝึกหัดข้อ 1–10	8

ตอนที่ 2 การแปรผกผัน

เนื้อหาและตัวอย่าง	12
แบบฝึกหัดข้อ 11–20	17

ตอนที่ 3 การแปรผันเกี่ยวเนื่อง

เนื้อหาและตัวอย่าง	21
แบบฝึกหัดข้อ 21–30	25

ตอนที่ 4 การแปรผันรวม

เนื้อหาและตัวอย่าง	29
แบบฝึกหัดข้อ 31–40	33

ตอนที่ 5 เวลา ระยะทาง และปริมาณสะสม

เนื้อหาและตัวอย่าง	37
แบบฝึกหัดข้อ 41–50	42

ตอนที่ 6 ผลบวกของปริมาณที่แปรผัน

เนื้อหาและตัวอย่าง	46
แบบฝึกหัดข้อ 51–60	52
เฉลยคำตอบ	56
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	59

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

1.1 ความหมายของการแปรผันตรง

การแปรผันอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด เมื่อปริมาณหนึ่งเปลี่ยนไป อีกปริมาณหนึ่งเปลี่ยนตามกฎเดียวกัน การระบุชนิดของการแปรผันจึงพิจารณาจากสมการหรือปริมาณที่คงตัว

การแปรผันตรง

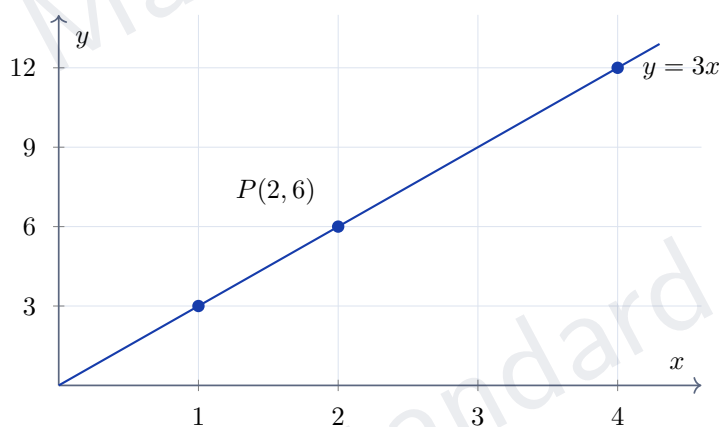
y แปรผันตรงกับ x เขียนเป็น $y \propto x$ หมายความว่า

$$y = kx, \quad k \neq 0$$

k คือค่าคงตัวของการแปรผัน และเมื่อ $x \neq 0$ จะได้ $k = \frac{y}{x}$

ตัวอย่างตารางของ $y = 3x$ แสดงว่าอัตราส่วน y/x เท่ากันทุกคู่ที่ $x \neq 0$

x	1	2	3	4
y	3	6	9	12
y/x	3	3	3	3



กราฟของ $y = 3x$ เป็นเส้นตรงผ่านจุดกำเนิด

ตัวอย่าง 1 $y \propto x$ และ $y = 20$ เมื่อ $x = 5$ จงหา y เมื่อ $x = 7$

วิธีคิด เขียน $y = kx$ แล้วแทนข้อมูล $20 = 5k$ จึงได้ $k = 4$ ความสัมพันธ์คือ $y = 4x$ เมื่อ $x = 7$ จะได้ $y = 4(7) = 28$

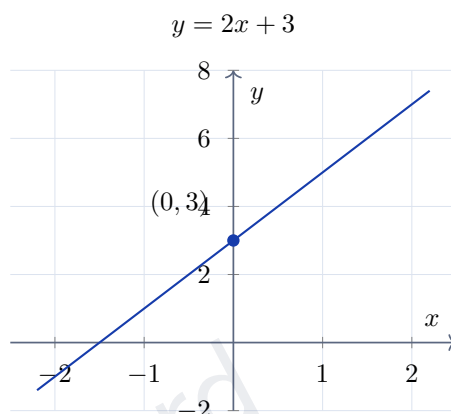
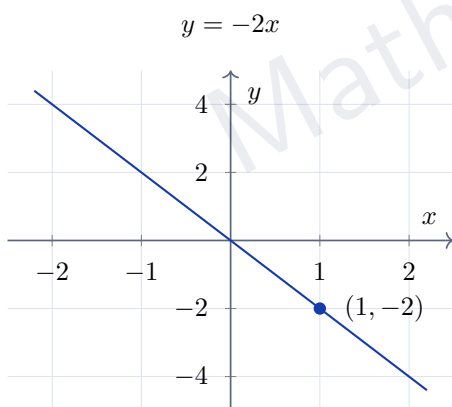
ตอบ 28

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

1.2 กราฟและเครื่องหมายของค่าคงตัว

กราฟของ $y = kx$ เป็นเส้นตรงผ่าน $(0, 0)$ และมีความชัน k ถ้า $k > 0$ ค่า y เพิ่มขึ้นเมื่อ x เพิ่มขึ้น แต่ถ้า $k < 0$ ค่า y ลดลงเมื่อ x เพิ่มขึ้น ทั้งสองกรณียังคงเป็นการแปรผันตรง เพราะอัตราส่วน y/x คงตัว



เส้นตรงผ่านจุดกำเนิดกับเส้นตรงที่มีส่วนคงตัวเพิ่มเข้ามา

เส้นตรง $y = 2x + 3$ ไม่ใช่การแปรผันตรงกับ x เพราะเมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 3$ และอัตราส่วน $y/x = 2 + 3/x$ เปลี่ยนไปตาม x

เปรียบเทียบข้อมูลสองชุด

ให้ (x_1, y_1) แทนข้อมูลเดิม และ (x_2, y_2) แทนข้อมูลใหม่ จาก $y_1 = kx_1$ และ $y_2 = kx_2$ ภายใต้ค่าคงตัวและหน่วยเดิม

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}, \quad y_2 = y_1 \frac{x_2}{x_1}$$

ใช้เมื่อปริมาณที่เป็นตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 2 $y \propto x$ โดย $y = -12$ เมื่อ $x = 3$ จงหาค่า y เมื่อ $x = 5$

วิธีคิด ค่าคงตัวคือ $k = -12/3 = -4$ จึงมี $y = -4x$ เมื่อ $x = 5$ ได้ $y = -20$ หรือใช้อัตราส่วน $y = -12(5/3) = -20$

ตอบ -20

การที่สองปริมาณเพิ่มขึ้นพร้อมกันยังไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าแปรผันตรง เช่น $y = x^2$ เมื่อ $x > 0$ ทั้งสองปริมาณเพิ่มพร้อมกัน แต่ $y/x = x$ ไม่คงตัว

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

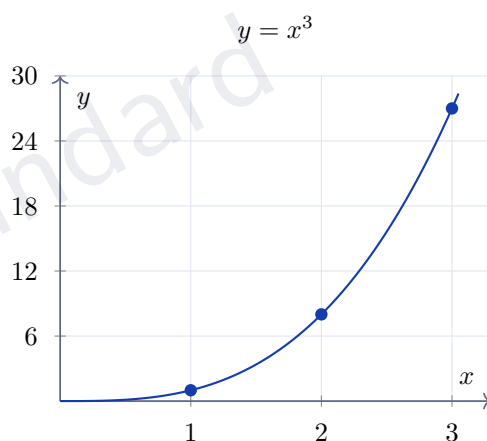
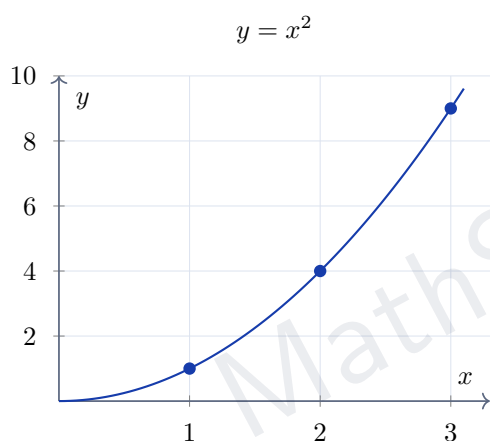
1.3 การแปรผันกับกำลังสองและกำลังสาม

คำว่าแปรผันตรงกับ x^2 หมายถึงนำ x^2 ทั้งพจน์เป็นปริมาณที่ใช้เปรียบเทียบ จึงไม่ใช่สูตรเดียวกับการแปรผันตรงกับ x โดยเลขชี้กำลัง

กำลังของปริมาณ

$$y \propto x^2 \iff y = kx^2, \quad y \propto x^3 \iff y = kx^3$$

สำหรับ $y = kx^n$ มี $\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n$ เมื่อทุกนิพจน์มีความหมายและตัวส่วนไม่เป็นศูนย์



กราฟบนช่วง $x \geq 0$ เมื่อค่าคงตัวเท่ากับ 1

ตัวอย่าง 3 $y \propto x^2$ และ $y = 45$ เมื่อ $x = 3$ จงหา y เมื่อ $x = 4$

วิธีคิด จาก $45 = k(3^2)$ ได้ $k = 5$ เมื่อ $x = 4$ จึงมี $y = 5(4^2) = 80$

ตอบ 80

ตัวอย่าง 4 ปริมาตรของวัตถุรูปคล้ายแปรผันตรงกับกำลังสามของความยาว เมื่อความยาวทุกด้านเป็น $\frac{3}{2}$ เท่าของเดิม ปริมาตรเป็นกี่เท่าของเดิม

วิธีคิด อัตราส่วนปริมาตรคือ $(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$ ต้องยกกำลังทั้งอัตราส่วนของความยาว

ตอบ $\frac{27}{8}$ เท่าของเดิม

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

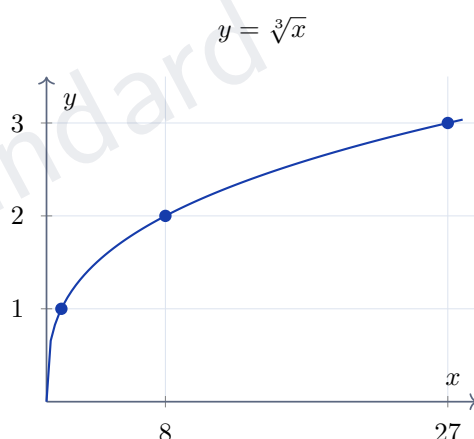
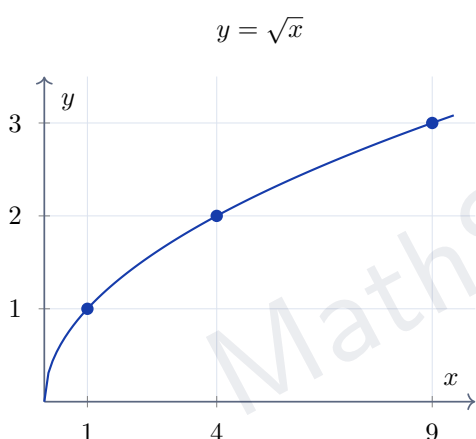
1.4 การแปรผันกับรากที่สองและรากที่สาม

รากที่สองและรากที่สามใช้เชื่อมโยงปริมาณที่สัมพันธ์ผ่านกำลังสองหรือกำลังสาม การแทนค่าควรหาค่ารากก่อน แล้วจึงคูณค่าคงตัว

กรณีของปริมาณ

$$y = k\sqrt{x} \quad (x \geq 0), \quad y = k\sqrt[3]{x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

กรณี $x_1, x_2 > 0$ มี $\frac{y_2}{y_1} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ หรือ $\frac{y_2}{y_1} = \sqrt[3]{\frac{x_2}{x_1}}$ ตามชนิดที่กำหนด



เมื่อ x เป็นปริมาณบวก รากเพิ่มขึ้นช้ากว่าปริมาณ x

ตัวอย่าง 5 $y \propto \sqrt{x}$ และ $y = 12$ เมื่อ $x = 16$ จงหา y เมื่อ $x = 36$

วิธีคิด เขียน $12 = k\sqrt{16} = 4k$ ได้ $k = 3$ ดังนั้น $y = 3\sqrt{36} = 3(6) = 18$

ตอบ 18

ตัวอย่าง 6 $y \propto \sqrt[3]{x}$ และ $y = 10$ เมื่อ $x = 8$ จงหา y เมื่อ $x = 27$

วิธีคิด จาก $10 = k\sqrt[3]{8} = 2k$ ได้ $k = 5$ เมื่อ $x = 27$ มี $y = 5\sqrt[3]{27} = 5(3) = 15$

ตอบ 15

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

1.5 การประยุกต์กับปริมาตรและการแบ่งวัสดุ

ทรงกลมรัศมี r มีปริมาตร $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ จึงแปรผันตรงกับกำลังสามของรัศมี โดยค่าคงตัวคือ $4\pi/3$ เมื่อใช้หน่วยความยาวเดียวกัน

ปริมาตรทรงกลมและการอนุรักษ์ปริมาตร

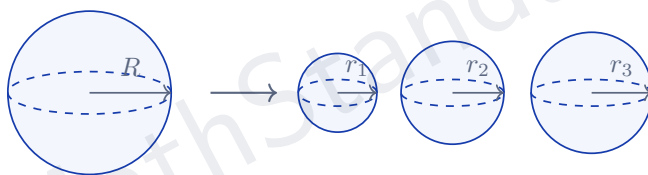
ให้ V_1, V_2 แทนปริมาตรทรงกลมที่มีรัศมี r_1, r_2 ตามลำดับ

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

เมื่อนำทรงกลมตันรัศมี R ไปแบ่งเป็นทรงกลมตันสามลูกที่มีรัศมี r_1, r_2, r_3 โดยไม่สูญเสียเนื้อวัสดุ

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3)$$

จึงได้ $R^3 = r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$



เปรียบเทียบปริมาตรรวมก่อนและหลังแบ่งวัสดุ ภาพไม่ใช้มาตราส่วน

ตัวอย่าง 7 ลูกบอลดินปั้นรัศมี 4 เซนติเมตรแบ่งเป็นลูกบอลตันขนาดเท่ากัน 8 ลูกโดยไม่สูญเสียเนื้อวัสดุ จงหารัศมีของแต่ละลูก

วิธีคิด ให้ $r > 0$ แทนรัศมีของลูกใหม่แต่ละลูก หน่วยเซนติเมตร จากปริมาตรรวมคงเดิมได้ $4^3 = 8r^3$ ดังนั้น $r^3 = 64/8 = 8$ จึงได้ $r = 2$

ตอบ 2 เซนติเมตร

1.6 หน่วยและค่าคงตัว

ค่าตัวเลขของ k ขึ้นกับหน่วยที่ใช้ เช่น ราคา C บาทของเชือกยาว ℓ เมตรเป็น $C = 20\ell$ ถ้าใช้ความยาว u เซนติเมตร จะมี $\ell = u/100$ จึงได้ $C = 0.2u$ ทั้งสองสมการอธิบายอัตราราคาเดียวกัน

การเปรียบเทียบข้อมูลต้องใช้หน่วยเดียวกันสำหรับปริมาณชนิดเดียวกัน และใช้สมการที่ตรงกับกำลังหรือเกณฑ์ของปริมาณนั้น

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-3

การแปรผันตรงและกำลังของปริมาณ

ข้อ 1 y แปรผันตรงกับ x และ $y = 18$ เมื่อ $x = 12$ จงหาค่าคงตัวของการแปรผัน

ตอบ _____

ข้อ 2 รับบิ้นชนิดหนึ่งมีมวลแปรผันตรงกับควมยาว รับบิ้นยาว 6 เมตรมีมวล 450 กรัม รับบิ้นชนิดเดียวกัน มวล 675 กรัมยาวกี่เมตร

ตอบ _____

ข้อ 3 y แปรผันตรงกับ x โดย $y = -15$ เมื่อ $x = 6$ จงหา x เมื่อ $y = -35$

ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2

การแปรผกผัน

2.1 ความหมายของการแปรผกผัน

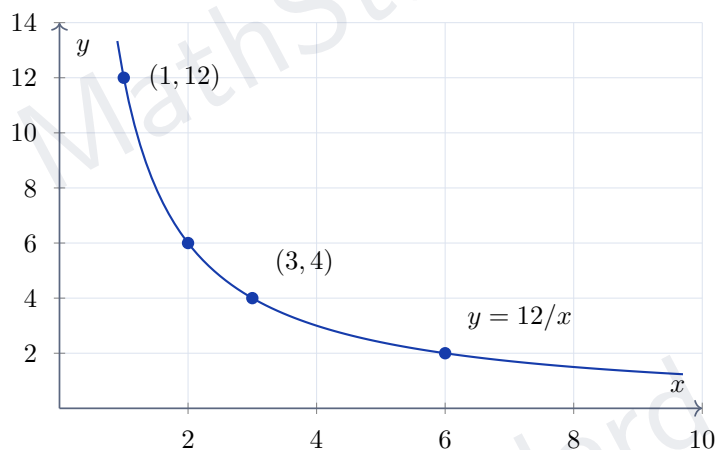
y แปรผกผันกับ x หมายถึง y แปรผันตรงกับส่วนกลับของ x จึงเขียนได้ $y = k/x$ เมื่อคูณทั้งสองข้างด้วย $x \neq 0$ จะได้ $xy = k$ ดังนั้นผลคูณของสองปริมาณเท่ากับค่าคงตัวของการแปรผกผัน

การแปรผกผัน

$$y \propto \frac{1}{x} \iff y = \frac{k}{x} \iff xy = k$$

โดย $k \neq 0$ และ $x \neq 0$ สำหรับข้อมูลสองชุดได้ $x_1y_1 = x_2y_2$

x	1	2	3	6
y	12	6	4	2
xy	12	12	12	12



กราฟส่วนปริมาณบวกของ $y = 12/x$ ไม่ตัดแกนพิกัด

เมื่อ $x, y > 0$ และ x เพิ่มขึ้นสองเท่า y จะเหลือครึ่งหนึ่ง ผลคูณจึงเท่าเดิม กราฟไม่ใช่เส้นตรง หากพิจารณา $x < 0$ ด้วยและ $k > 0$ กราฟจะมีอีกส่วนหนึ่งในจุดภาคที่สาม

ตัวอย่าง 8 y แปรผกผันกับ x โดย $y = 8$ เมื่อ $x = 6$ จงหา y เมื่อ $x = 16$

วิธีคิด จาก $xy = k$ ได้ $k = 6(8) = 48$ เมื่อ $x = 16$ จึงมี $y = 48/16 = 3$

ตอบ 3

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

การแปรผกผัน

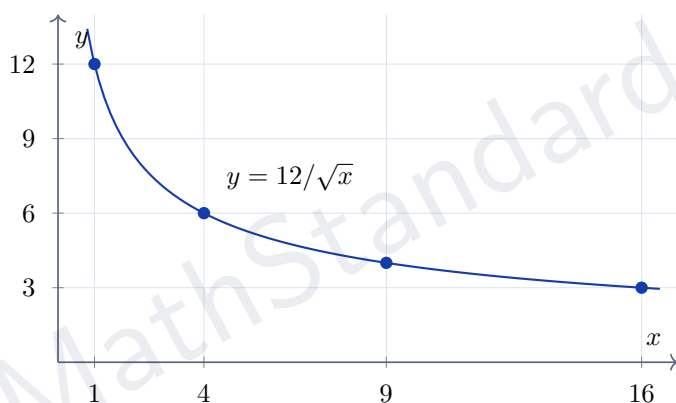
2.2 การแปรผกผันกับกรณฑ์หรือผลบวกทั้งกลุ่ม

นิพจน์ที่อยู่หลังคำว่าแปรผกผันต้องเป็นตัวส่วนทั้งกลุ่ม เช่น แปรผกผันกับ $x + \sqrt{x}$ หมายถึงหารด้วยผลบวกนี้ ไม่ใช่แยกหารทีละพจน์แล้วนำมาบวกกัน

รูปสมการที่ใช้บ่อย เมื่อ $x > 0$

$$y = \frac{k}{\sqrt{x}}, \quad y = \frac{k}{x + \sqrt{x}}, \quad y = \frac{k}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

ปริมาณที่คงตัวคือ $y\sqrt{x}$, $y(x + \sqrt{x})$ และ $y(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$ ตามลำดับ



ตัวอย่างกราฟ $y = 12/\sqrt{x}$ สำหรับ $x > 0$

ตัวอย่าง 9 y แปรผกผันกับ $\sqrt{x}$ ถ้า $y = 10$ เมื่อ $x = 9$ จงหา y เมื่อ $x = 25$

วิธีคิด จาก $k = y\sqrt{x} = 10(3) = 30$ ได้ $y = 30/\sqrt{x}$ แทน $x = 25$ จะได้ $y = 30/5 = 6$

ตอบ 6

ตัวอย่าง 10 y แปรผกผันกับ $x + \sqrt{x}$ โดย $y = 7$ เมื่อ $x = 4$ จงหา y เมื่อ $x = 9$

วิธีคิด ค่าคงตัวคือ $k = 7(4 + \sqrt{4}) = 7(6) = 42$ ดังนั้น $y = 42/(9 + \sqrt{9}) = 42/12 = 7/2$

ตอบ $\frac{7}{2}$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

การแปรผกผัน

2.3 การแปรผกผันในสถานการณ์

การที่ผลคูณคงตัวต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขของสถานการณ์ การเพิ่มปริมาณหนึ่งและลดอีกปริมาณหนึ่งเพียงอย่างเดียวจะไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าแปรผกผันกัน

จำนวนผู้ปฏิบัติงานกับเวลาทำงาน

ให้ n แทนจำนวนผู้ปฏิบัติงาน และ T แทนจำนวนวันที่ใช้ทำงาน หากแต่ละคนทำงานได้เท่ากันและทำงานวันละเท่ากัน ปริมาณงานที่ทำได้ทั้งหมดจึงขึ้นกับทั้งจำนวนคนและจำนวนวัน

เหตุใดผลคูณ nT จึงคงตัว

ให้ W แทนปริมาณงานทั้งหมด และ $r > 0$ แทนปริมาณงานที่หนึ่งคนทำได้ในหนึ่งวัน ผู้ปฏิบัติงาน n คนจึงทำได้วันละ rn หน่วย และใน T วันทำได้

$$W = rnT \quad \Rightarrow \quad nT = \frac{W}{r}$$

เมื่อเป็นงานเดิม W คงตัว และอัตราทำงานต่อคน r คงตัว ผลคูณ nT จึงคงตัว

หน่วย **คน-วัน** ใช้แสดงผลคูณของจำนวนคนกับจำนวนวัน ภายใต้อัตราทำงานต่อคนและชั่วโมงทำงานต่อวันที่เท่ากัน จำนวนคน-วันที่เท่ากันจึงแทนปริมาณงานเท่ากัน

ตัวอย่าง 11 ผู้ปฏิบัติงาน 5 คนใช้เวลา 18 วัน ถ้าใช้ 9 คนตั้งแต่เริ่มงาน ภายใต้อัตราทำงานและชั่วโมงต่อวันเท่ากัน จะใช้เวลากี่วัน

วิธีคิด ให้ T แทนจำนวนวันที่ต้องใช้เมื่อมีผู้ปฏิบัติงาน 9 คน งานเดิมใช้กำลังการทำงานรวม $5 \times 18 = 90$ คน-วัน งานครั้งใหม่ต้องใช้ผลคูณเท่าเดิม จึงได้

$$9T = 5(18) = 90 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{90}{9} = 10$$

ตรวจได้ว่า $5(18) = 9(10)$ และจำนวนคนที่มากขึ้นใช้เวลาน้อยลง

ตอบ 10 วัน

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 2 | ข้อ 11-13

การแปรผกผัน

ข้อ 11 y แปรผกผันกับ x ถ้า $y = 9$ เมื่อ $x = 8$ จงหา y เมื่อ $x = 12$

ตอบ _____

ข้อ 12 เวลาผลิตสินค้าจำนวนหนึ่งแปรผกผันกับอัตราการผลิต เมื่อผลิตนาฬิกา 24 ชิ้นใช้เวลา 35 นาที หากต้องการผลิตสินค้าจำนวนเดิมให้เสร็จใน 20 นาที ต้องใช้อัตราการผลิตกี่ชิ้นต่อนาที

ตอบ _____

ข้อ 13 ก๊าซปริมาณหนึ่งมีปริมาตรแปรผกผันกับความดันเมื่ออุณหภูมิคงตัว ที่ความดัน 1.2 บรรยากาศ มีปริมาตร 750 ลูกบาศก์เซนติเมตร จงหาปริมาตรเมื่อความดันเป็น 2 บรรยากาศ โดยปริมาณก๊าซและอุณหภูมิคงเดิม

ตอบ _____