



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.6

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ มุ่งพัฒนาความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างมุมและความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยเชื่อมโยงนิยามทางเรขาคณิตกับการคำนวณและการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เนื้อหาเริ่มจากการระบุด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ และค่าของมุมสำคัญ แล้วพัฒนาไปสู่เอกลักษณ์ สมการ หน่วยเรเดียน การหาระยะและความสูง ตลอดจนกฎของไซน์และกฎของโคไซน์ ให้ความสำคัญกับที่มาของสูตร เงื่อนไขการใช้ และการแปลความหมายของคำตอบ

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การประยุกต์ ในการ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง ส่วนขยายเชื่อมโยงพีชคณิต กรณธ์ สมการ กำลังสอง ความคล้าย และพื้นที่ ผู้เรียนควรมีพื้นฐานการคำนวณจำนวนจริง อัตราส่วน และทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

เมื่อกำหนดชื่อจุดยอดสามเหลี่ยมเป็น A, B, C ใช้ $a = BC$, $b = CA$ และ $c = AB$ แทนความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ ชื่อด้านคงเดิมเมื่อเปลี่ยนมุมที่พิจารณา ส่วนด้านตรงข้ามมุมฉากขึ้นอยู่กับตำแหน่งมุมฉากของแต่ละรูป

- มุมแหลมมีขนาดมากกว่า 0° และน้อยกว่า 90° อัตราส่วนตรีโกณมิติทั้งหกของมุมแหลมมีค่าเป็นบวก
- สัญลักษณ์ $\sin^2 A$ หมายถึง $(\sin A)^2$ ส่วน $\sin(2A)$ หมายถึงไซน์ของมุมที่มีขนาดเป็นสองเท่าของมุม A
- มุมใช้หน่วยองศาเมื่อมีสัญลักษณ์ $^\circ$ และใช้หน่วยเรเดียนเมื่อระบุไว้ การแทนค่าต้องใช้หน่วยมุมเดียวกัน
- ความยาวที่นำมาเปรียบเทียบต้องใช้หน่วยเดียวกัน ตัวส่วนของนิพจน์ต้องไม่เป็นศูนย์
- รูปประกอบใช้แสดงข้อมูลและความสัมพันธ์ คำนวณจากเงื่อนไขที่กำหนด โดยไม่ใช้การวัดจากรูป
- คำตอบใช้ค่าที่แน่นอน เว้นแต่โจทย์กำหนดการประมาณค่า และต้องระบุหน่วยของความยาว พื้นที่ หรือมุมให้สอดคล้องกับสิ่งที่ถาม

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

สารบัญ

ตอนที่ 1 อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–10	11

ตอนที่ 2 มุมสำคัญและการคำนวณ

เนื้อหาและตัวอย่าง	15
แบบฝึกหัดข้อ 11–20	22

ตอนที่ 3 เอกลักษณะและมุมเติมเต็ม

เนื้อหาและตัวอย่าง	26
แบบฝึกหัดข้อ 21–30	31

ตอนที่ 4 พิสูจน์และสมการตรีโกณมิติ

เนื้อหาและตัวอย่าง	35
แบบฝึกหัดข้อ 31–40	44

ตอนที่ 5 หน่วยเรเดียน

เนื้อหาและตัวอย่าง	48
แบบฝึกหัดข้อ 41–50	51

ตอนที่ 6 ความยาว เส้นสูง และพื้นที่

เนื้อหาและตัวอย่าง	55
แบบฝึกหัดข้อ 51–60	59

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 มุมเงย มุมก้ม และความสูง

เนื้อหาและตัวอย่าง	64
แบบฝึกหัดข้อ 61–70	70

ตอนที่ 8 ระยະบนพื้นและความกว้าง

เนื้อหาและตัวอย่าง	75
แบบฝึกหัดข้อ 71–80	80

ตอนที่ 9 กฎของไซน์และกฎของโคไซน์

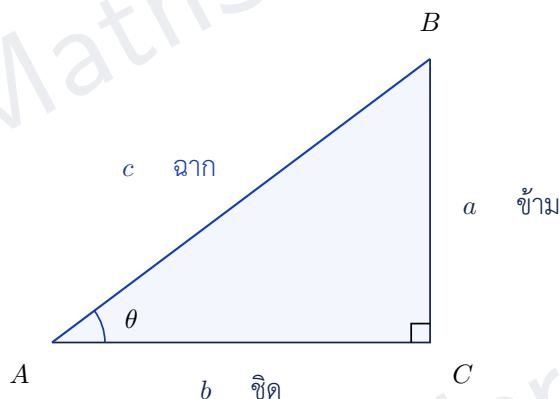
เนื้อหาและตัวอย่าง	85
แบบฝึกหัดข้อ 81–90	92
เฉลยคำตอบ	97
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	102

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.1 มุมอ้างอิงและชื่อด้าน

อัตราส่วน ตรีโกณมิติ เป็น ความสัมพันธ์ ระหว่าง ขนาด มุม กับ อัตราส่วน ความยาว ด้าน ของ รูป สามเหลี่ยมมุมฉาก การระบุด้านต้องเริ่มจากมุมแหลมที่กำลังพิจารณา ซึ่งเรียกว่า **มุมอ้างอิง**



มุม $C = 90^\circ$ และ $A = \theta$ โดย $a = BC$, $b = CA$ และ $c = AB$

ความหมายของคำช่วยจำ

ข้าม คือด้านตรงข้ามมุมที่พิจารณา จึงเป็นด้านที่ไม่ผ่านจุดยอดของมุมนั้น

ชิด คือด้านประชิดมุมที่พิจารณา โดยไม่ใช่ด้านตรงข้ามมุมฉาก

ฉาก คือด้านตรงข้ามมุมฉาก เป็นด้านที่ยาวที่สุด

จากรูป ด้าน a, b, c อยู่ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ เมื่อพิจารณามุม A ด้าน BC คือข้าม ด้าน CA คือชิด และด้าน AB คือฉาก เมื่อพิจารณามุม B ข้ามกับชิดจะสลับกัน แต่ชื่อด้านและด้านฉากคงเดิม

ตัวอย่าง 1 จากรูป จงระบุด้านตรงข้ามและด้านประชิดมุม B

วิธีคิด มุม B ประกอบด้วยด้าน BA และ BC แต่ BA เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก จึงเหลือ BC เป็นด้านประชิด ส่วนด้านที่ไม่ผ่านจุด B คือ CA

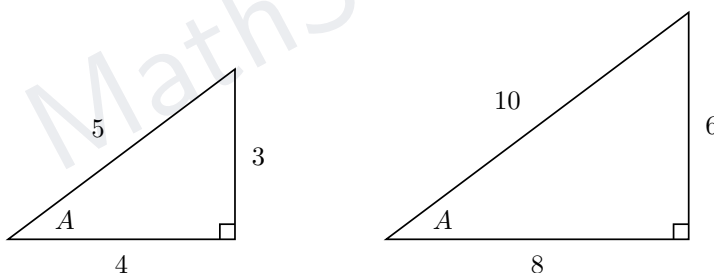
ตอบ ด้านตรงข้ามคือ CA และด้านประชิดคือ BC

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.2 ความคล้ายกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมแหลมคู่หนึ่งเท่ากันย่อมคล้ายกัน เพราะมุมอีกคู่หนึ่งเท่ากันด้วย ด้านที่สมนัยกันจึงเป็นสัดส่วน อัตราส่วนของด้านสองด้านจึงขึ้นกับมุม ไม่ขึ้นกับขนาดของรูป



รูปทั้งสองมีมุม A เท่ากัน และด้านตรงข้ามมุมฉากอยู่ตรงข้ามมุม 90°

เมื่อขยายด้านทั้งสามด้วยตัวคูณร่วมเดียวกัน ตัวคูณนั้นจะตัดกันในอัตราส่วน เช่น ด้านของรูปซ้ายเป็น 3, 4, 5 และรูปขวาเป็น 6, 8, 10 หน่วย จะได้

$$\frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \quad \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} \quad \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

นิยามอัตราส่วนหลัก

ในสามเหลี่ยม ABC ที่มี $C = 90^\circ$ และ $\theta = A$ ให้ $a = BC$, $b = CA$ และ $c = AB$ เป็นด้านข้าม ด้านชิด และด้านฉาก ตามลำดับ

$$\sin \theta = \frac{a}{c} \quad \cos \theta = \frac{b}{c} \quad \tan \theta = \frac{a}{b}$$

อ่านว่า ไชน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ตามลำดับ

คำช่วยจำ: ไชน์ ข้ามฉาก โคไซน์ ชิดฉาก แทน ข้ามชิด

$$\sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} \quad \cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} \quad \tan \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$$

อัตราส่วนเหล่านี้ ไม่มีหน่วย เพราะ เป็นการ หาร ความยาว ที่ใช้ หน่วยเดียวกัน สำหรับ มุม แหลม มี $0 < \sin \theta < 1$, $0 < \cos \theta < 1$ ส่วน $\tan \theta > 0$ และอาจมากกว่า 1 ได้

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.2 การใช้นิยามอัตราส่วนหลัก (ต่อ)

ก่อนแทนค่าต้องระบุมุมที่พิจารณาและด้านทั้งสามให้ตรงกัน หากทราบเพียงสองด้าน ให้ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาด้านที่เหลือก่อน

ตัวอย่าง 2 สามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านตรงข้ามมุม A ยาว 9 และด้านประชิดยาว 12 หน่วย จงหาอัตราส่วนหลักทั้งสาม

วิธีคิด ให้ $c > 0$ แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

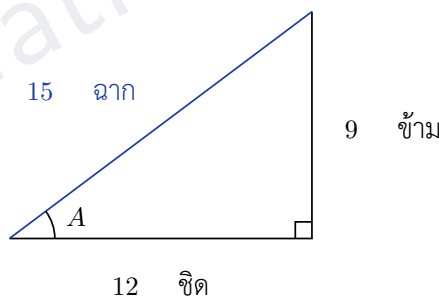
$$c^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \quad c = 15$$

เมื่อพิจารณามุม A ด้านข้ามยาว 9 ด้านชิดยาว 12 และด้านฉากยาว 15 หน่วย จึงได้

$$\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad \cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

ตอบ $\sin A = 3/5$, $\cos A = 4/5$ และ $\tan A = 3/4$



ด้านข้ามและด้านชิดระบุโดยเทียบกับมุม A ส่วนด้านฉากอยู่ตรงข้ามมุมฉากเสมอ

การใช้คำช่วยจำอย่างถูกต้อง

เลือกมุมอ้างอิงก่อนระบุข้ามและชิด จากนั้นจึงเขียนอัตราส่วน

คำว่า **ฉาก** หมายถึงด้านตรงข้ามมุมฉาก ไม่ใช่ด้านประกอบมุมฉาก

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.3 อัตราส่วนส่วนกลับ

ส่วนกลับของจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์เกิดจากการนำ 1 หารด้วยจำนวนนั้น อัตราส่วนส่วนกลับจึงสลับตัวเศษกับตัวส่วนของอัตราส่วนเดิม โดยยังคงใช้มุมอ้างอิงเดิม

อัตราส่วนส่วนกลับทั้งสาม

ใช้สามเหลี่ยม ABC ที่มี $C = 90^\circ$ และ $\theta = A$ เช่นเดิม

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{c}{a} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{c}{b}$$

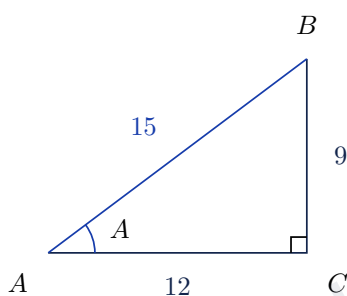
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{b}{a}$$

$\csc$ อ่านว่า โคเซแคนต์ และเขียนเป็น cosec ได้

$\sec$ อ่านว่า เซแคนต์ และ $\cot$ อ่านว่า โคแทนเจนต์

สำหรับมุมแหลม ความยาวด้านทุกด้านเป็นบวก อัตราส่วนทั้งหกจึงเป็นบวก และตัวส่วนในนิยามไม่เป็นศูนย์ จากการหารอัตราส่วนไซน์ด้วยโคไซน์ยังได้

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \tan \theta$$



ใช้มุม A เดิมเมื่อหาอัตราส่วนส่วนกลับ

ตัวอย่าง 3 จงหา $\csc A$, $\sec A$ และ $\cot A$ จากรูป

วิธีคิด กลับอัตราส่วนของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ตามลำดับ

$$\csc A = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \quad \sec A = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \quad \cot A = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

ตอบ $\csc A = 5/3$, $\sec A = 5/4$ และ $\cot A = 4/3$

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-3

อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข้อ 1 สามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก โดย $AB = 16$, $BC = 12$ และ $AC = 20$ หน่วย จงหา $\sin A$ และ $\cos A$

ตอบ _____

ข้อ 2 กำหนดให้ A เป็นมุมแหลมและ $\tan A = \frac{8}{15}$ จงหา $\sin A$

ตอบ _____

ข้อ 3 กำหนดให้ $\sin \theta = \frac{12}{13}$ และ θ เป็นมุมแหลม จงหา $\cos \theta$ และ $\tan \theta$

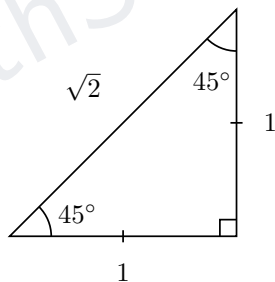
ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2

มุมสำคัญและการคำนวณ

2.1 ที่มาของมุม 30° , 45° และ 60°

สามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากัน มุมแหลมทั้งสองจึงเท่ากันและรวมกันได้ 90° แต่ละมุมจึงมีขนาด 45°



ด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย และมุมแหลมมีขนาดเท่ากัน

ให้ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $c > 0$ หน่วย ทฤษฎีบทพีทาโกรัสให้

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad c = \sqrt{2}$$

สามเหลี่ยมมุม $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

อัตราส่วนด้านตรงข้ามมุม 45° , 45° และ 90° คือ $1 : 1 : \sqrt{2}$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 45^\circ = 1$$

ตัวอย่าง 8 สามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วมีด้านประกอบมุมฉากยาว 6 หน่วย จงหาด้านตรงข้ามมุมฉาก

วิธีคิด คูณอัตราส่วน $1 : 1 : \sqrt{2}$ ด้วย 6 ได้ความยาวด้านเป็น 6, 6, $6\sqrt{2}$ หน่วย ตรวจสอบด้วยพีทาโกรัสได้ $\sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

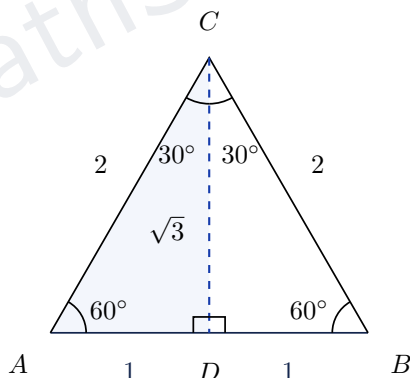
ตอบ $6\sqrt{2}$ หน่วย

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

มุมสำคัญและการคำนวณ

2.1 การแบ่งครึ่งสามเหลี่ยมด้านเท่า (ต่อ)

สามเหลี่ยมมุม $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ สร้างได้จากสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ที่มีด้านยาวด้านละ 2 หน่วย ลากเส้นสูง CD ลงสู่ด้าน AB จะได้สามเหลี่ยมมุมฉาก ACD และ BCD ที่เท่ากันทุกประการ



เส้นสูง CD แบ่งสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นสองรูป โดย $AD = DB = 1$

เส้นสูงนี้แบ่งครึ่งทั้งฐานและมุมยอด จึงมี $AD = DB = 1$ และ $\angle ACD = \angle BCD = 30^\circ$ ส่วนมุมที่ A และ B ยังคงเป็น 60° พิจารณาสามเหลี่ยม ACD แล้วใช้พีทาโกรัส

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \quad CD = \sqrt{3}$$

สามเหลี่ยมมุม $30^\circ-60^\circ-90^\circ$

อัตราส่วนด้านตรงข้ามมุม 30° , 60° และ 90° คือ $1 : \sqrt{3} : 2$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

เมื่อพิจารณามุม 60° ด้านข้ามกับด้านชิดสลับกัน จึงได้

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

มุมสำคัญและการคำนวณ

2.2 ตารางค่าของมุมสำคัญ

ตารางต่อไปนี้ได้จากอัตราส่วนด้านในหัวข้อ 2.1 ส่วนค่าที่ 0° และ 90° เป็นการขยายนิยามด้วยวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งอธิบายในหัวข้อ 2.4

อัตราส่วน	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม

การหาค่าของอัตราส่วนส่วนกลับ

หาค่า sin, cos หรือ tan ก่อน แล้วกลับเศษส่วนเมื่อค่านั้นไม่เป็นศูนย์ เช่น $\csc 30^\circ = 2$, $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$, $\cot 60^\circ = \sqrt{3}/3$

ตัวอย่าง 9 จงหา $6 \tan 30^\circ + 2 \cot 60^\circ$

วิธีคิด ทั้งสองอัตราส่วนมีค่า $\sqrt{3}/3$ จึงได้ $6(\sqrt{3}/3) + 2(\sqrt{3}/3) = 8\sqrt{3}/3$

ตอบ $8\sqrt{3}/3$

ตัวอย่าง 10 สามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 16 หน่วย จงหาด้านตรงข้ามมุม 30°

วิธีคิด ให้ด้านที่ถ้ามยาว x หน่วย จาก $\sin 30^\circ = x/16$ ได้ $x = 16(1/2) = 8$

ตอบ 8 หน่วย

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 7

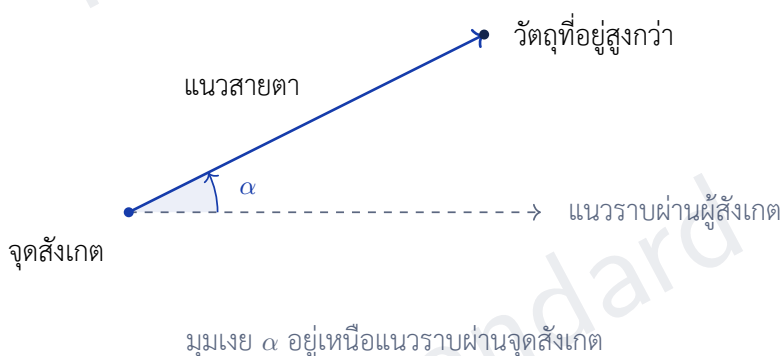
มุมเงย มุมก้ม และความสูง

7.1 มุมเงยและมุมก้ม

มุมเงย เป็นมุมระหว่างแนวราบผ่านจุดสังเกตกับแนวสายตาที่มองขึ้น ส่วน **มุมก้ม** เป็นมุมระหว่างแนวราบผ่านจุดสังเกตกับแนวสายตาที่มองลง มุมทั้งสองวัดจากแนวราบ ไม่วัดจากแนวตั้ง

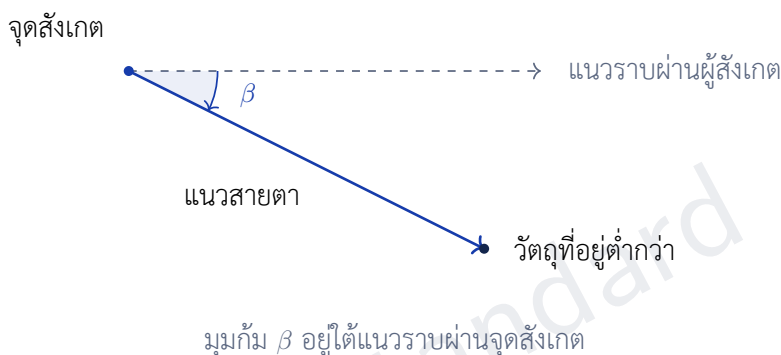
มุมเงย: มองวัตถุที่อยู่สูงกว่าระดับสายตา

ในภาพ ให้ α แทนมุมเงย จุดยอดของมุมอยู่ที่จุดสังเกต วัดมุมจากแนวราบผ่านผู้สังเกตขึ้นไปถึงแนวสายตา



มุมก้ม: มองวัตถุที่อยู่ต่ำกว่าระดับสายตา

ในภาพ ให้ β แทนมุมก้ม จุดยอดของมุมอยู่ที่จุดสังเกตเช่นเดียวกัน แต่วัดมุมจากแนวราบลงไปถึงแนวสายตา



หลักการระบุมุม

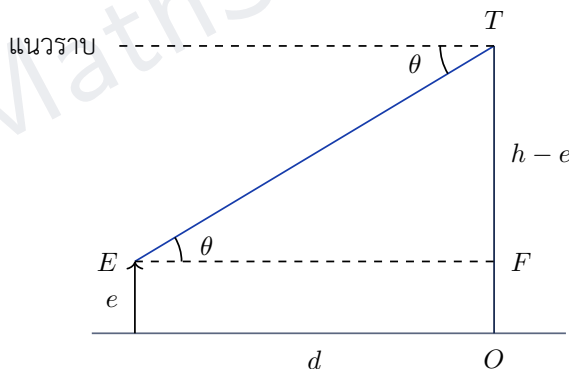
เริ่มจากจุดสังเกต ลากแนวราบผ่านจุดนั้น แล้วพิจารณามุมระหว่างแนวราบกับแนวสายตา มุมทั้งสองชนิดไม่ได้วัดจากแนวตั้ง

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 7 (ต่อ)

มุมเงย มุมก้ม และความสูง

7.1 ความสัมพันธ์ของมุมเงยกับมุมก้ม (ต่อ)

เมื่อผู้สังเกตสองจุดมองถึงกัน แนวราบผ่านจุดสังเกตทั้งสองขนานกัน และแนวสายตาเป็นเส้นตัด มุมเงยจากจุดต่ำจึงเท่ากับมุมก้มจากจุดสูง เพราะเป็นมุมแย้งภายใน ดังรูปต่อไปนี้



แนวราบผ่าน E และ T ขนานกัน มุมเงยและมุมก้มที่สอดคล้องกันจึงเท่ากัน

ในรูป ให้ T เป็นยอดวัตถุ O เป็นฐาน และ E เป็นจุดสังเกต กำหนด h เป็นความสูงวัตถุจากพื้น e เป็นระดับจุดสังเกตจากพื้น และ d เป็นระยะราบถึงแนวดิ่งของวัตถุ จุด F อยู่บน OT ในระดับเดียวกับ E

ความสูงที่ใช้ในอัตราส่วน

ถ้าพื้นอยู่ระดับเดียวกันและมุมเงยเป็น θ

$$\tan \theta = \frac{h - e}{d} \quad h = e + d \tan \theta$$

ความสูงในสามเหลี่ยมคือส่วนต่างระดับ $h - e$ ไม่ใช่ความสูงจากพื้นเสมอไป

ตัวอย่าง 47 กล้องสูงจากพื้น 1.5 เมตร อยู่ห่างเสา 12 เมตร และวัดมุมเงยถึงยอดเสาได้ 45° จงหาความสูงเสา

วิธีคิด ส่วนสูงเหนือเลนส์เป็น $12 \tan 45^\circ = 12$ เมตร รวมระดับเลนส์ได้ $1.5 + 12 = 13.5$ เมตร

ตอบ 13.5 เมตร