



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ระบบสมการ

เรื่อง ระบบสมการ

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.2

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบสมการ มุ่งพัฒนาความเข้าใจความสัมพันธ์ของตัวแปรที่สอดคล้องกับเงื่อนไขหลายประการพร้อมกัน โดยเชื่อมโยงการแปลความหมายของสมการ กราฟในระนาบพิกัด และการให้เหตุผลทางพีชคณิต

เนื้อหาเริ่มจากสมการเส้นตรง ความชัน จุดตัดแกน และความสัมพันธ์ของเส้นตรง ศึกษาความหมายและจำนวนคำตอบของระบบสมการ ก่อนเข้าสู่วิธีแทนค่า วิธีกำจัดตัวแปร ระบบไม่เชิงเส้น และการใช้เอกลักษณ์พีชคณิต จากนั้นประยุกต์กับปริมาณ ราคา อายุ การเคลื่อนที่ อัตราส่วน และเงื่อนไขของเลขโดด

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง โดยเชื่อมโยงจำนวนจริง พหุนาม สมการกำลังสอง และเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ผู้เรียนควรมีพื้นฐานการคำนวณจำนวนจริง การกระจายพจน์ และการแยกตัวประกอบ

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- ตัวแปรและสัมประสิทธิ์พิจารณาในระบบจำนวนจริง เว้นแต่โจทย์กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม
- คำตอบของระบบต้องสอดคล้องกับทุกสมการพร้อมกัน คู่อันดับ (x, y) ระบุพิกัด x ก่อนพิกัด y
- เส้นตรงขนานกันหมายถึงเส้นตรงคนละเส้นที่ไม่มีจุดร่วม แยกจากกรณีเส้นตรงทับกัน
- ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ และ $\sqrt{a}$ หมายถึงรากที่สองที่ไม่เป็นลบเมื่อ $a \geq 0$
- ค่าความยาว เวลา จำนวนสิ่งของ และเลขโดดต้องสอดคล้องกับหน่วยและเงื่อนไขของสถานการณ์
- อ่านพิกัดจากค่าบนแกน ภาพที่มีมาตราส่วนแกนต่างกันไม่ใช่วัดมุมหรือความยาวแทนข้อมูลที่กำหนด

เรียบเรียงโดย MathStandard สำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ระบบสมการ

สารบัญ

ตอนที่ 1 เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–10	9

ตอนที่ 2 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

เนื้อหาและตัวอย่าง	13
แบบฝึกหัดข้อ 11–28	18

ตอนที่ 3 ความหมายและจำนวนคำตอบของระบบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	25
แบบฝึกหัดข้อ 29–34	29

ตอนที่ 4 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

เนื้อหาและตัวอย่าง	32
แบบฝึกหัดข้อ 35–44	37

ตอนที่ 5 ระบบไม่เชิงเส้นและการลดรูป

เนื้อหาและตัวอย่าง	41
แบบฝึกหัดข้อ 45–56	49

ตอนที่ 6 การสร้างระบบสมการจากสถานการณ์

เนื้อหาและตัวอย่าง	55
แบบฝึกหัดข้อ 57–61	59

เรื่อง ระบบสมการ

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 การประยุกต์และการให้เหตุผล

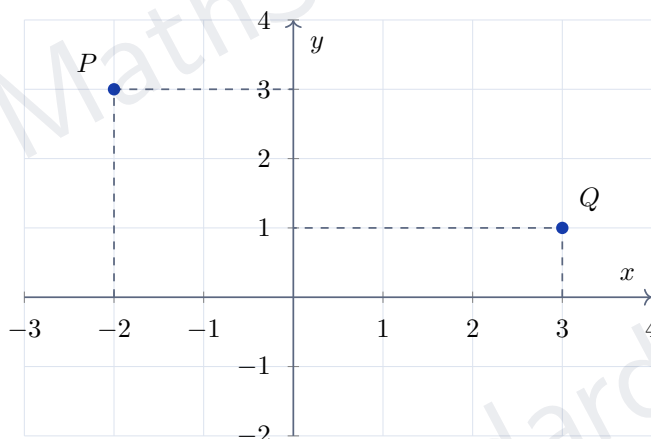
เนื้อหาและตัวอย่าง	61
แบบฝึกหัดข้อ 62–66	66
เฉลยคำตอบ	69
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	73

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

1.1 คู่อันดับและจุดบนกราฟ

ระนาบพิกัดประกอบด้วยแกน x และแกน y ซึ่งตั้งฉากกันที่จุดกำเนิด $O(0,0)$ คู่อันดับ (x,y) ระบุพิกัดแนวนอนก่อนพิกัดแนวตั้ง โดยค่าบวกและค่าลบแสดงทิศทางจากจุดกำเนิด



จุด $P(-2, 3)$ อยู่ทางซ้าย 2 หน่วยและด้านบน 3 หน่วย จุด $Q(3, 1)$ อยู่ทางขวา 3 หน่วยและด้านบน 1 หน่วย

สมการสองตัวแปรเป็นเงื่อนไขของคู่อันดับ จุดหนึ่งอยู่บนกราฟของสมการก็ต่อเมื่อแทนพิกัดทั้งสองแล้วทำให้สมการเป็นจริง กราฟจึงเป็นเซตของจุดที่สอดคล้องกับสมการ

ความหมายของจุดบนกราฟ

สำหรับสมการ $Ax + By = C$ จุด (u, v) อยู่บนกราฟก็ต่อเมื่อ

$$Au + Bv = C$$

ตัวอย่าง 1 จุด $(2, 1)$ และ $(1, 2)$ จุดใดอยู่บนกราฟ $2x + y = 5$

วิธีคิด แทน $(2, 1)$ ได้ $2(2) + 1 = 5$ จึงอยู่บนกราฟ

แทน $(1, 2)$ ได้ $2(1) + 2 = 4 \neq 5$ จึงไม่อยู่บนกราฟ

ตอบ จุด $(2, 1)$

คู่อันดับ $(2, 1)$ และ $(1, 2)$ เป็นคนละจุด การสลับตำแหน่งของพิกัดอาจเปลี่ยนผลการตรวจสอบสมการ

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

1.2 ความชันของเส้นตรง

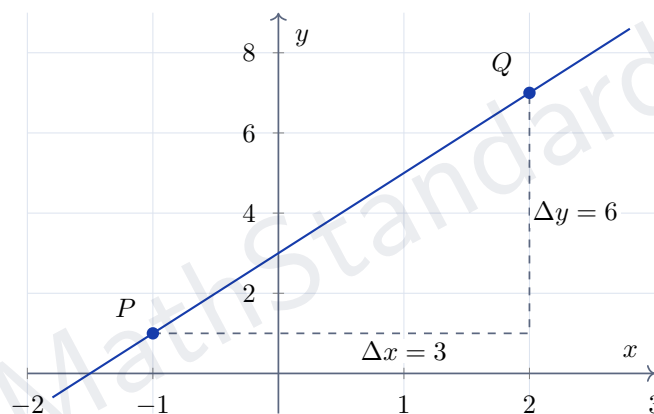
ความชันแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน y เทียบกับฟังก์ชัน x เมื่อเคลื่อนจากจุดหนึ่งไปอีกจุดหนึ่งบนเส้นตรง สำหรับเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน y อัตราส่วนนี้มีค่าคงตัว

ความชันจากจุดสองจุด

เมื่อ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดต่างกันบนเส้นตรง และ $x_1 \neq x_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ต้องเรียงลำดับการลบฟังก์ชันของเศษและส่วนให้ตรงกัน



จาก $P(-1, 1)$ ไป $Q(2, 7)$ มี $\Delta x = 3$ และ $\Delta y = 6$ จึง $m = 2$

เมื่อ x เพิ่มขึ้น 1 หน่วย ค่า y ของเส้นตรงนี้เพิ่มขึ้น 2 หน่วย หากกลับทิศทางการพิจารณา ทั้งเศษและส่วนเปลี่ยนเครื่องหมายพร้อมกัน จึงยังได้ความชันเท่าเดิม

ตัวอย่าง 2 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่าน $(-2, 5)$ และ $(4, 2)$

วิธีคิด ใช้สูตร $m = \frac{2 - 5}{4 - (-2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ ความชันเป็นลบ เพราะเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่า y ลดลง

ตอบ $-\frac{1}{2}$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

1.3 รูปสมการและเครื่องหมายของความชัน

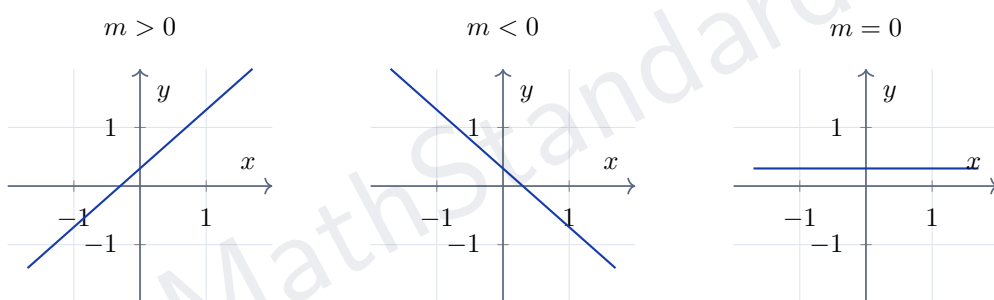
สมการเส้นตรงเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ถ้า $B \neq 0$ จะจัดให้อยู่ในรูปที่อ่านความชันได้โดยตรง

รูปความชันและจุดตัดแกน

$$y = mx + c$$

m คือความชัน และ $(0, c)$ คือจุดตัดแกน y

จาก $Ax + By + C = 0$ เมื่อ $B \neq 0$ ได้ $m = -\frac{A}{B}$ และ $c = -\frac{C}{B}$



จากซ้ายไปขวา เส้นตรงมีความชันบวก ความชันลบ และความชันศูนย์ตามลำดับ

เส้นแนวนอน $y = c$ มีความชันศูนย์ ส่วนเส้นแนวตั้ง $x = a$ ไม่มีค่าความชัน เพราะผลต่างพิกัด x เป็นศูนย์ จึงไม่สามารถเขียนเส้นแนวตั้งในรูป $y = mx + c$ ได้

ตัวอย่าง 3 จงหาความชันและจุดตัดแกน y ของเส้นตรง $2x + 4y - 8 = 0$

วิธีคิด จัดรูปเป็น $4y = -2x + 8$ จึงได้ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ตอบ ความชัน $-\frac{1}{2}$ และจุดตัดแกน y คือ $(0, 2)$

รูป $Ax + By = C$ และ $Ax + By + C = 0$ ใช้ค่าคงตัวต่างเครื่องหมายกัน ต้องพิจารณารูปสมการก่อนแทนสูตร

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

1.4 จุดตัดแกนและรูปตัดแกน

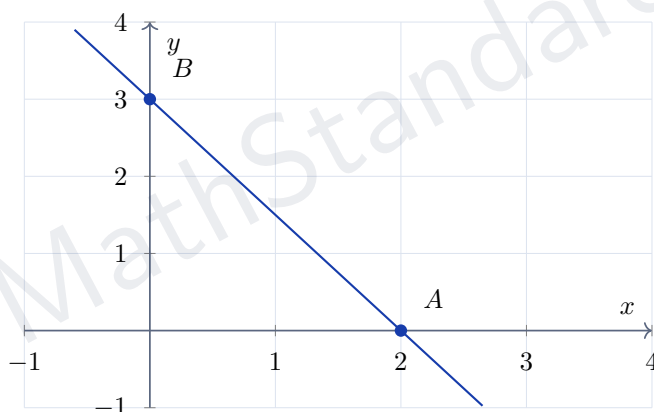
จุดบนแกน x มีพิกัด $y = 0$ ส่วนจุดบนแกน y มีพิกัด $x = 0$ การหาจุดตัดแกนจึงเป็นการแทนศูนย์ในตัวแปรที่เกี่ยวข้อง

จุดตัดแกนของ $Ax + By + C = 0$

$$\text{แกน } x : \left(-\frac{C}{A}, 0\right) \quad (A \neq 0) \quad \text{แกน } y : \left(0, -\frac{C}{B}\right) \quad (B \neq 0)$$

ถ้าจุดตัดแกนเป็น $(a, 0)$ และ $(0, b)$ โดย $a, b \neq 0$ จะเขียนได้เป็น

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



เส้นตรง $3x + 2y = 6$ ตัดแกนที่ $A(2, 0)$ และ $B(0, 3)$

ตัวอย่าง 4 จงหาจุดตัดแกนทั้งสองของ $2x + 3y = 12$ และเขียนสมการในรูปตัดแกน

วิธีคิด แทน $y = 0$ ได้ $x = 6$ และแทน $x = 0$ ได้ $y = 4$ จึงหาสมการเดิมด้วย 12 ได้ $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$

ตอบ $(6, 0), (0, 4)$ และ $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$

เส้นที่ผ่านจุดกำเนิดมีจุดตัดแกนทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน จึงใช้รูปตัดแกนที่มีตัวหาร a, b ไม่ได้

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

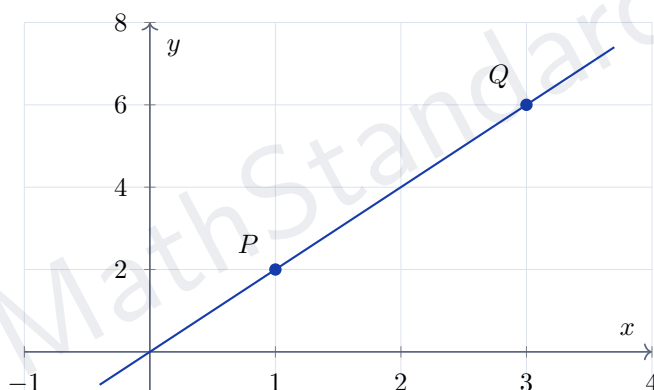
1.5 การสร้างสมการเส้นตรง

การทราบจุดหนึ่งจุดเพียงอย่างเดียวยังไม่กำหนดเส้นตรงได้แน่นอน แต่เมื่อทราบความชันร่วมด้วย จะใช้ความชันเชื่อมจุดทั่วไป (x, y) กับจุดที่กำหนด (x_1, y_1) ได้

รูปจุดและความชัน

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ถ้าทราบสองจุด ให้หาความชันก่อนใช้สูตรนี้ หากสองจุดมีพิกัด x เท่ากัน เส้นตรงเป็นแนวตั้งและใช้สมการ $x = x_1$



เส้นตรงผ่าน $P(1, 2)$ และ $Q(3, 6)$ มีความชัน 2 จึงมีสมการ $y = 2x$

ตัวอย่าง 5 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่าน $(2, 5)$ และมีความชัน 3

วิธีคิด แทนในรูปจุดและความชัน ได้ $y - 5 = 3(x - 2)$ กระจายเป็น $y - 5 = 3x - 6$ จึง $y = 3x - 1$

ตอบ $y = 3x - 1$

ตัวอย่าง 6 เส้นตรง $x - 2y = k$ ผ่าน $(3, -1)$ จงหาค่า k

วิธีคิด แทนค่าพิกัดในสมการ ได้ $k = 3 - 2(-1) = 5$

ตอบ 5

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-3

เส้นตรง ความชัน และจุดตัดแกน

ข้อ 1 เส้นตรง $3x - 2y = k$ ผ่านจุด $(-2, 4)$ จงหาค่า k

ตอบ _____

ข้อ 2 จงหาความชันของเส้นตรง $4x + 3y = 12$

ตอบ _____

ข้อ 3 เส้นตรง $2x - 5y = 15$ ตัดแกน y ที่จุด A จงหาพิกัดของ A

ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 3

ความหมายและจำนวนคำตอบของระบบ

3.1 ความหมายของระบบสมการ

ระบบสมการประกอบด้วยสมการตั้งแต่สองสมการขึ้นไปที่ใช้ตัวแปรร่วมกัน คำตอบของระบบต้องทำให้ทุกสมการเป็นจริงพร้อมกัน สำหรับระบบสองตัวแปรจะเขียนคำตอบเป็นคู่อันดับ (x, y)

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

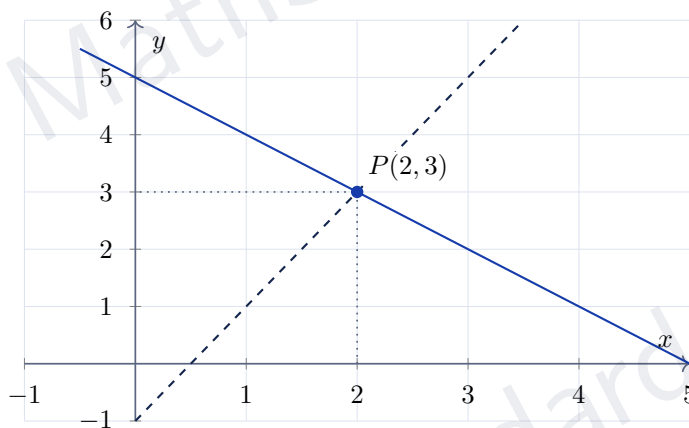
$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases}$$

สัมประสิทธิ์ A, B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ D, E ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน แต่ละสมการจึงแทนเส้นตรงหนึ่งเส้น

ตัวอย่าง 14 จงตรวจว่า $(2, 3)$ และ $(1, 4)$ เป็นคำตอบของระบบ $x + y = 5$, $2x - y = 1$ หรือไม่

วิธีคิด สำหรับ $(2, 3)$ ได้ $2 + 3 = 5$ และ $2(2) - 3 = 1$ จึงสอดคล้องทั้งสองสมการ

สำหรับ $(1, 4)$ แม้ว่า $1 + 4 = 5$ แต่ $2(1) - 4 = -2 \neq 1$ จึงไม่เป็นคำตอบของระบบ



กราฟ $x + y = 5$ และ $2x - y = 1$ ตัดกันที่ $P(2, 3)$ ซึ่งทำให้ทั้งสองสมการเป็นจริง

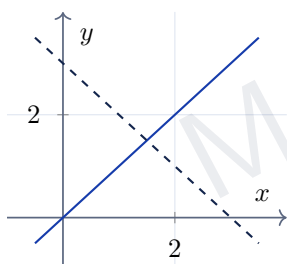
ตอบ $(2, 3)$ เป็นคำตอบ ส่วน $(1, 4)$ ไม่เป็นคำตอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 3 (ต่อ)

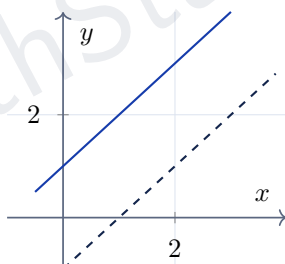
ความหมายและจำนวนคำตอบของระบบ

3.2 จำนวนคำตอบและความสัมพันธ์ของกราฟ

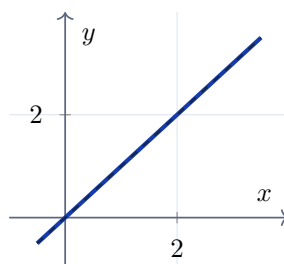
แต่ละจุดร่วมของกราฟแทนคำตอบหนึ่งคู่อันดับ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจึงมีได้สามกรณี คือมีหนึ่งคำตอบ ไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบไม่จำกัด



หนึ่งคำตอบ



ไม่มีคำตอบ



คำตอบไม่จำกัด

จำนวนจุดร่วมเป็นเกณฑ์จำแนกจำนวนคำตอบของระบบ

กราฟ	จำนวนคำตอบ	ความหมาย
ตัดกันหนึ่งจุด	หนึ่งคู่อันดับ	มีจุดที่สอดคล้องร่วมกันจุดเดียว
ขนานกันคนละเส้น	ไม่มีคำตอบ	ไม่มีจุดร่วม
ทับกัน	ไม่จำกัด	ทุกจุดบนเส้นนั้นเป็นคำตอบ

ตัวอย่าง 15 จงระบุจำนวนคำตอบของระบบ $x + 2y = 6$ และ $2x + 4y = 15$

วิธีคิด คูณสมการแรกด้วย 2 ได้ $2x + 4y = 12$ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เหมือนสมการที่สอง แต่ค่าคงตัวต่างกัน เส้นตรงจึงขนานกันและไม่มีจุดร่วม

ตอบ ไม่มีคำตอบ

ระบบเชิงเส้นที่มีเพียงสองตัวแปรไม่สามารถมีคำตอบเพียงสองคู่อันดับ เพราะเส้นตรงสองเส้นที่มีจุดร่วมต่างกันสองจุดต้องเป็นเส้นเดียวกัน

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 3 (ต่อ)

ความหมายและจำนวนคำตอบของระบบ

3.3 การกำจัดตัวแปรเพื่อจำแนกคำตอบ

การบวกหรือลบสมการสามารถใช้ตรวจสอบจำนวนคำตอบได้ หากสัมประสิทธิ์เป็นสัดส่วนเดียวกัน ตัวแปรอาจหายไปทั้งหมด โดยต้องพิจารณาความจริงของสมการที่เหลือ

ผลที่เกิดหลังการกำจัดตัวแปร

$0 = d$ เมื่อ $d \neq 0$ เป็นข้อความเท็จ จึงไม่มีคำตอบ

$0 = 0$ สองสมการสมมูลกัน จึงเหลือเงื่อนไขของเส้นตรงเส้นเดียว

$px = q$ เมื่อ $p \neq 0$ ได้ $x = q/p$ แล้วแทนกลับเพื่อหา y

สำหรับรูปทั่วไปในหัวข้อ 3.1 หาก $AE - BD \neq 0$ ระบบมีหนึ่งคำตอบ ถ้า $AE - BD = 0$ ต้องเปรียบเทียบค่าคงตัวต่อ จึงจะสรุปได้ว่าไม่มีคำตอบหรือมีคำตอบไม่จำกัด

ตัวอย่าง 16 จงเขียนคำตอบทั้งหมดของ $x - 2y = 4$ และ $3x - 6y = 12$

วิธีคิด สมการที่สองเป็นสามเท่าของสมการแรก จึงเหลือ $x - 2y = 4$ ให้ $y = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริง จะได้ $x = 4 + 2t$

ตอบ $(x, y) = (4 + 2t, t)$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$

คำตอบไม่จำกัดในตัวอย่างนี้ไม่ได้หมายถึงทุกคู่อันดับในระนาบ แต่หมายถึงทุกคู่อันดับบนเส้น $x - 2y = 4$ เช่น $(4, 0), (6, 1), (2, -1)$

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 3 | ข้อ 29–30

ความหมายและจำนวนคำตอบของระบบ

ข้อ 29 จากคู่อันดับ $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$ จงเลือกคู่อันดับที่เป็นคำตอบของระบบ $x + y = 3$ และ $2x - y = 3$

ตอบ _____

ข้อ 30 จงระบุจำนวนคำตอบของแต่ละระบบ

(ก) $x + y = 4$, $x - y = 2$

(ข) $2x + y = 5$, $4x + 2y = 12$

(ค) $x - 3y = 2$, $2x - 6y = 4$

ตอบ _____