



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง จำนวนจริง

เรื่อง จำนวนจริง

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.3

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนจริง มุ่งพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับระบบจำนวน การแทนจำนวนในรูปต่าง ๆ และการดำเนินการทางพีชคณิต โดยเน้นความหมายของสัญลักษณ์ เงื่อนไขของนิยามและสูตร ตลอดจนการให้เหตุผลและตรวจสอบคำตอบ

เนื้อหา เริ่ม จาก ชนิด ของ จำนวนจริง และ ทศนิยมซ้ำ สมบัติ ของ จำนวนจริง อสมการ และ ค่าสัมบูรณ์ แล้วเชื่อมโยงสู่รากและกรณฑ์ คู่สังยุค การจัดรูปกรณฑ์ซ้อน และสมการที่มีกรณฑ์ จากนั้นขยายสู่การดำเนินการที่นิยามขึ้น เศษส่วนที่มีแบบรูป การหักล้างของพจน์ และกรณฑ์อนันต์

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การ ประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง โดยเชื่อมโยงจำนวนเต็ม เศษส่วน เลขยกกำลัง สมการ และ พหุนาม ผู้เรียน ควร มี พื้นฐาน การดำเนินการ กับ จำนวนเต็ม เศษส่วน และ สมบัติ ของ เลขยกกำลัง

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงตามลำดับ
- ตัวแปรมีค่าเป็นจำนวนจริง เว้นแต่โจทย์กำหนดไว้เป็นอย่างอื่น ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ และจำนวนภายในกรณฑ์อันดับคู่ต้องไม่เป็นลบ
- $\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่ไม่เป็นลบของ $a \geq 0$ จึงมี $\sqrt{x^2} = |x|$ การยกกำลังสองเพื่อแก้สมการต้องตรวจสอบคำตอบกับสมการเดิม
- คำตอบที่เป็นเศษส่วนเขียนในรูปอย่างต่ำ และปริมาณที่มีหน่วยต้องระบุหน่วย กรณฑ์อนันต์ในเล่มนี้กำหนดให้มีค่าจริงแน่นอนและเป็นบวก โดยใช้ $\dots$ แสดงการซ้อนต่อเนื่องตามแบบรูปเดิม

เรื่อง จำนวนจริง

สารบัญ

ตอนที่ 1 จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–14	9

ตอนที่ 2 สมบัติ อสมการ และค่าสัมบูรณ์

เนื้อหาและตัวอย่าง	15
แบบฝึกหัดข้อ 15–28	20

ตอนที่ 3 รากและการดำเนินการของกรณฑ์

เนื้อหาและตัวอย่าง	26
แบบฝึกหัดข้อ 29–38	30

ตอนที่ 4 คู่สังยุคและการทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์

เนื้อหาและตัวอย่าง	34
แบบฝึกหัดข้อ 39–50	38

ตอนที่ 5 การจัดรูปกรณฑ์ซ้อน

เนื้อหาและตัวอย่าง	44
แบบฝึกหัดข้อ 51–60	47

ตอนที่ 6 สมการที่มีกรณฑ์

เนื้อหาและตัวอย่าง	51
แบบฝึกหัดข้อ 61–72	56

เรื่อง จำนวนจริง

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 การดำเนินการที่นิยามขึ้น

เนื้อหาและตัวอย่าง	62
แบบฝึกหัดข้อ 73–80	65

ตอนที่ 8 เศษส่วน การหักล้าง และกรณฑ์อนันต์

เนื้อหาและตัวอย่าง	69
แบบฝึกหัดข้อ 81–96	75
เฉลยคำตอบ	82
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	86

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

1.1 ชนิดของจำนวนจริง

จำนวนจริงใช้แทนตำแหน่งบนเส้นจำนวน แบ่งเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ โดยจำนวนจริงแต่ละจำนวนอยู่ในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งเพียงกลุ่มเดียว

กลุ่มจำนวนและสัญลักษณ์

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ แทนเซตของจำนวนนับ

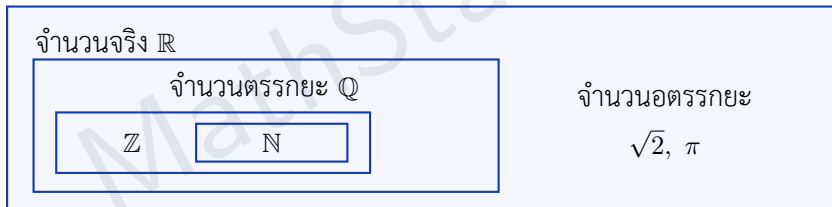
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

สัญลักษณ์ $\subset$ ในที่นี้แสดงว่าเซตทางซ้ายเป็นส่วนหนึ่งของเซตทางขวา เช่น จำนวนเต็ม -4 เป็นจำนวนตรรกยะด้วย เพราะเขียนเป็น $\frac{-4}{1}$ ได้

ตัวอย่าง 1.1 จงจำแนก $\sqrt{36}$ และ $\sqrt{10}$

วิธีคิด $\sqrt{36} = 6$ จึงเป็นจำนวนนับ จำนวนเต็ม และจำนวนตรรกยะ ส่วน 10 ไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จึงมี $\sqrt{10}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ตอบ $\sqrt{36}$ เป็นตรรกยะ และ $\sqrt{10}$ เป็นอตรรกยะ

การจำแนกต้องพิจารณาค่าของนิพจน์ ไม่พิจารณาจากการมีเครื่องหมายกรณฑ์เพียงอย่างเดียว

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

1.2 รูปทศนิยมและการดำเนินการ

จำนวนตรรกยะเขียนในรูปทศนิยมสิ้นสุดหรือทศนิยมซ้ำได้ ส่วนจำนวนอตรรกยะมีทศนิยมไม่สิ้นสุดและไม่ซ้ำเป็นคาบ คำว่าเป็นคาบหมายถึงมีชุดเลขโดดชุดเดิมปรากฏซ้ำตลอดตั้งแต่ตำแหน่งหนึ่งเป็นต้นไป

ชนิดของผลลัพธ์

ให้ r, s เป็นจำนวนตรรกยะ และ u เป็นจำนวนอตรรกยะ

$$r + s, r - s, rs \in \mathbb{Q}, \quad \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \quad (s \neq 0)$$

$r + u$ และ $r - u$ เป็นอตรรกยะ ส่วน ru เป็นอตรรกยะเมื่อ $r \neq 0$

ผลบวกหรือผลคูณของอตรรกยะสองจำนวนอาจเป็นตรรกยะหรืออตรรกยะ

ตัวอย่างเหตุผลของกรณี $r + u$ คือ ถ้าสมมติว่าผลบวกเป็นตรรกยะ เมื่อลบ r ซึ่งเป็นตรรกยะออก จะทำให้ u เป็นตรรกยะด้วย ซึ่งขัดกับเงื่อนไขเดิม

ตัวอย่าง 1.2 จงจำแนก 1.375 และ $0.\overline{18}$

วิธีคิด $1.375 = \frac{1375}{1000} = \frac{11}{8}$ ส่วน $0.\overline{18} = 0.181818\dots$ เป็นทศนิยมซ้ำ จึงเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้เช่นกัน

ตอบ ทั้งสองจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง 1.3 ผลคูณของจำนวนอตรรกยะสองจำนวนเป็นอตรรกยะเสมอหรือไม่

วิธีคิด เลือก $\sqrt{2}$ กับ $\sqrt{2}$ จะได้ผลคูณ 2 ซึ่งเป็นตรรกยะ แต่ $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ เป็นอตรรกยะ จึงไม่สามารถระบุชนิดจากตัวประกอบสองตัวเพียงอย่างเดียว

ตอบ ไม่จริงเสมอ

ข้อยกเว้น $r = 0$ ต้องพิจารณาแยก เพราะ $0u = 0$ เป็นตรรกยะ แม้ u เป็นอตรรกยะ

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

1.3 การเปลี่ยนทศนิยมซ้ำเป็นเศษส่วน

ขีดบนจุดเลขโดดแสดงส่วนที่ซ้ำ เช่น $0.\overline{54} = 0.545454 \dots$ การเปลี่ยนเป็นเศษส่วนอาศัยการคูณด้วยกำลังของ 10 เพื่อให้ส่วนซ้ำตรงกัน แล้วลบสมการเพื่อตัดส่วนซ้ำ

ตัวอย่าง 1.4 จงเขียน $0.\overline{54}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีคิด ให้ $x = 0.\overline{54}$ จึงมี

$$100x = 54.545454 \dots$$

$$x = 0.545454 \dots$$

$$99x = 54$$

ดังนั้น $x = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$

ตอบ $\frac{6}{11}$

ตัวอย่าง 1.5 จงเขียน $3.\overline{8}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีคิด ให้ $x = 3.8888 \dots$ จะได้ $10x = 38.8888 \dots$ ลบกันได้ $9x = 35$ ดังนั้น $x = \frac{35}{9}$

ตอบ $\frac{35}{9}$

ส่วนซ้ำเริ่มถัดจากจุดทศนิยมทันที

หากส่วนซ้ำมี n หลัก ให้คูณด้วย 10^n แล้วลบสมการเดิม ตัวส่วนก่อนย่อจึงเป็น $10^n - 1$ เช่น ส่วนซ้ำ 2 หลักใช้ตัวส่วน 99 และส่วนซ้ำ 3 หลักใช้ตัวส่วน 999

เมื่อโจทย์กำหนดให้หาเศษและส่วนของเศษส่วนอย่างต่ำ ต้องย่อเศษส่วนก่อนอ่านค่าที่ต้องการ

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

1.4 ทศนิยมที่มีส่วนไม่ซ้ำก่อนส่วนซ้ำ

ให้เลื่อนจุดทศนิยมจนส่วนซ้ำเริ่มถัดจากจุดทศนิยมก่อน จากนั้นเลื่อนอีกครั้งให้ครบหนึ่งชุดซ้ำ ส่วนไม่ซ้ำอาจรวมทั้งจำนวนเต็มและเลขโดดหลังจุดทศนิยมบางตำแหน่ง

ตัวอย่าง 1.6 จงเขียน $0.2\overline{7}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีคิด ให้ $x = 0.2777\dots$ จะได้

$$10x = 2.777\dots, \quad 100x = 27.777\dots$$

ลบสมการได้ $90x = 25$ ดังนั้น $x = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

ตอบ $\frac{5}{18}$

ตัวอย่าง 1.7 จงเขียน $2.13\overline{6}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีคิด ให้ $x = 2.13666\dots$ ได้ $100x = 213.666\dots$ และ $1000x = 2136.666\dots$ ดังนั้น

$$900x = 2136 - 213 = 1923, \quad x = \frac{641}{300}$$

ตอบ $\frac{641}{300}$

สูตรสรุปเมื่อมีส่วนไม่ซ้ำ

ตัวเศษก่อนย่อ คือจำนวนที่เขียนถึงชุดซ้ำแรก ลบด้วยจำนวนที่เขียนก่อนชุดซ้ำ

ตัวส่วนก่อนย่อ ประกอบด้วยเลข 9 ตามจำนวนหลักซ้ำ แล้วตามด้วยเลข 0 ตามจำนวนหลักทศนิยมที่ไม่ซ้ำ ต้องเขียนจำนวนทั้งสองโดยตัดจุดทศนิยมออกตามตำแหน่งที่ระบุ แล้วลดเศษส่วนให้เป็นอย่างต่ำ

สูตรนี้เน้นเฉพาะหลักทศนิยมที่ไม่ซ้ำในการเติมศูนย์ ไม่รวมจำนวนหลักของส่วนจำนวนเต็ม

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

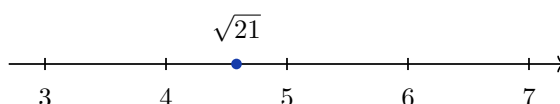
1.5 การประมาณรากและเงื่อนไขจำนวนเต็ม

สำหรับ k เป็นจำนวนเต็มบวก $\sqrt{k}$ เป็นจำนวนตรรกยะก็ต่อเมื่อ k เป็นกำลังสองสมบูรณ์ การแยกตัวประกอบเฉพาะจึงใช้ทั้งจำแนกรากและหาตัวคูณให้เกิดกำลังสองสมบูรณ์

กำลังสองสมบูรณ์และตำแหน่งของราก

ถ้า $m \geq 0$ และ $m^2 < a < (m+1)^2$ แล้ว $m < \sqrt{a} < m+1$

จำนวนเต็มบวกเป็นกำลังสองสมบูรณ์ เมื่อเลขชี้กำลังของตัวประกอบเฉพาะทุกตัวเป็นจำนวนคู่



ตัวอย่าง 1.8 จงระบุจำนวนเต็มสองจำนวนที่อยู่ติดกันและมี $\sqrt{21}$ อยู่ระหว่างกลาง

วิธีคิด เพราะ $4^2 = 16 < 21 < 25 = 5^2$ จึงมี $4 < \sqrt{21} < 5$

ตอบ 4 และ 5

ตัวอย่าง 1.9 จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดซึ่งคูณ 72 แล้วได้กำลังสองสมบูรณ์

วิธีคิด แยก $72 = 2^3 \cdot 3^2$ เลขชี้กำลังของ 2 เป็นคี่ จึงต้องคูณเพิ่มด้วย 2 ได้ $72(2) = 144 = 12^2$

ตอบ 2

การนับจำนวนเต็มในช่วงต้องตรวจว่ารวมปลายช่วงหรือไม่ เช่น $-1 < x < 3$ มี 0, 1, 2 ส่วน $-1 \leq x \leq 3$ เพิ่ม -1 และ 3

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-2

จำนวนจริงและทศนิยมซ้ำ

ข้อ 1 กำหนดเซต $A = \{-6, 0, \frac{7}{4}, \sqrt{49}, -\sqrt{16}, \sqrt{12}, 0.\bar{3}, \pi\}$ จงระบุ สมาชิก ที่เป็น จำนวนเต็ม
จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

ตอบ _____

ข้อ 2 ในรายการ $\sqrt{9}, \frac{6}{2}, 3.0, 0.\bar{3}, 1, \sqrt{2}$ มีจำนวนจริงที่มีค่าแตกต่างกันกี่จำนวน

ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4

คู่สังยุคและการทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์

4.1 ตัวส่วนกรณฑ์และคู่สังยุค

การทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์เป็นการเขียนเศษส่วนให้มีค่าเดิม โดยคูณทั้งเศษและส่วนด้วยจำนวนเดียวกันที่ไม่เป็นศูนย์ เพื่อให้ตัวส่วนใหม่เป็นจำนวนตรรกยะ

ตัวส่วนหนึ่งพจน์และสองพจน์

$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{a}}{a} \quad (a > 0)$$

$$\frac{c}{u+v} = \frac{c(u-v)}{u^2-v^2}$$

สูตรที่สองใช้เมื่อ $u+v \neq 0$ และ $u-v \neq 0$

คู่ของ $u+v$ กับ $u-v$ เรียกว่า **คู่สังยุค**

ตัวอย่าง 4.1 จงทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์ของ $\frac{5}{\sqrt{3}}$

วิธีคิด คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{3}$ ได้ $\frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

ตอบ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

ตัวอย่าง 4.2 จงทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์ของ $\frac{2}{3+\sqrt{7}}$

วิธีคิด คูณด้วยคู่สังยุค $3-\sqrt{7}$ ได้ $\frac{2(3-\sqrt{7})}{9-7} = 3-\sqrt{7}$

ตอบ $3-\sqrt{7}$

ถ้าคู่สังยุคที่เลือกเป็นศูนย์ จะนำมาคูณเป็นเศษส่วน $\frac{0}{0}$ ไม่ได้ เช่น $\frac{1}{2+\sqrt{4}}$ ควรจัดรูปโดยตรงเป็น $\frac{1}{4}$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

คู่สังยุคและการทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์

4.2 ผลบวก ผลต่าง และผลคูณของคู่สังยุค

ก่อนกระจายนิพจน์ที่ยาว ควรพิจารณาว่ามีผลบวก ผลต่าง หรือผลคูณที่หาได้จากคู่สังยุคหรือไม่ แล้วใช้เอกลักษณ์ที่สัมพันธ์กับสิ่งที่ถาม

ความสัมพันธ์ที่ใช้แทนค่า

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy, \quad (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

ถ้าทราบ $x + y$ และ xy สามารถแทนค่าในเอกลักษณ์ได้โดยไม่ต้องหาค่า x, y แยกกัน ส่วนการหาผลบวกหรือผลคูณจากกรณฑ์ต้องจัดรูปตามนิพจน์ที่กำหนดในแต่ละโจทย์

ตัวอย่าง 4.3 ถ้า $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ และ $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ จงหาค่า $x^2 + y^2$

วิธีคิด นิพจน์ x, y เป็นส่วนกลับกัน จึงมี $xy = 1$ หาผลบวกโดยทำส่วนให้เท่ากัน

$$x + y = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{(4+2\sqrt{3}) + (4-2\sqrt{3})}{3-1} = 4$$

แทนใน $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ ได้ $4^2 - 2(1) = 14$

ตอบ 14

ตัวอย่าง 4.4 จงหาค่า $\frac{1}{\sqrt{5}-2} - \frac{1}{\sqrt{5}+2}$

วิธีคิด ใช้ตัวส่วนร่วม $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 1$ ตัวเศษเป็น $(\sqrt{5}+2) - (\sqrt{5}-2) = 4$

ตอบ 4

หากโจทย์ให้เขียนเป็นผลบวกของกรณฑ์หลายชนิด ให้จัดรูปกรณฑ์และรวมชนิดเดียวกันก่อนอ่านสัมประสิทธิ์

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

คู่สังยุคและการทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์

4.3 ตัวส่วนที่มีสามพจน์

ให้จัดสองพจน์เป็นหนึ่งกลุ่ม แล้วใช้ผลต่างกำลังสอง ตัวส่วนใหม่อาจยังมีกรณฑ์ จึงต้องทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์ต่ออีกครั้ง

ตัวอย่าง 4.5 จงทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์ของ $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

วิธีคิด จัด $1 + \sqrt{2}$ เป็นกลุ่มเดียว แล้วคูณด้วย $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

ตัวคูณไม่เป็นศูนย์ เพราะ $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} > 3$

ตอบ $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

ตัวอย่าง 4.6 จงหาค่า $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})$

วิธีคิด จัด $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ เป็นกลุ่มเดียว ได้ $2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 2 - (8 + 2\sqrt{15})$

ตอบ $-6 - 2\sqrt{15}$

การจัดกลุ่มต้องคงเครื่องหมายทุกพจน์ โดยเฉพาะเครื่องหมายลบที่อยู่หน้าวงเล็บของกำลังสอง

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 4 | ข้อ 39-40

คู่สังยุคและการทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์

ข้อ 39 จงทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์และจัดรูป $\frac{12}{\sqrt{6}}$

ตอบ _____

ข้อ 40 จงทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์ของ $\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

ตอบ _____