



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง สมการกำลังสอง

เรื่อง สมการกำลังสอง

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.3

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการกำลังสอง มุ่งพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับคำตอบของสมการ การแปลงสมการที่รักษาชุดคำตอบ และความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์กับราก โดยให้ความสำคัญกับการให้เหตุผล เงื่อนไขของตัวแปร และความถูกต้องของการใช้สัญลักษณ์

เนื้อหาเริ่มจากรูปมาตรฐาน การตรวจคำตอบ การแยกตัวประกอบ การถอดราก การทำกำลังสองสมบูรณ์ และสูตรแก้สมการกำลังสอง จากนั้นศึกษาจำนวนคำตอบ พารามิเตอร์ และความสัมพันธ์ของราก ก่อนเชื่อมโยงสู่สมการเศษส่วน ปัญหาพื้นที่ อัตราการทำงาน กราฟ และความน่าจะเป็น ส่วนท้ายขยายสู่สมการดีกรีสูงที่ลดรูปได้และความสัมพันธ์ของราก

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง โดยเชื่อมโยงพหุนาม จำนวนจริง เรขาคณิต และการนับ ผู้เรียนควรมีพื้นฐานสมการเชิงเส้น การแยกตัวประกอบ สมบัติของเลขยกกำลัง และรากที่สอง

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- ตัวแปร สัมประสิทธิ์ และคำตอบพิจารณาในระบบจำนวนจริง เว้นแต่กำหนดเงื่อนไขเฉพาะเพิ่มเติม
- $\sqrt{a}$ หมายถึงรากที่สองที่ไม่เป็นลบของ $a \geq 0$ ส่วนเครื่องหมาย $\pm$ ใช้แทนการพิจารณาทั้งกรณีบวกและกรณีลบ
- ตัวส่วนทุกตัวต้องไม่เป็นศูนย์ เงื่อนไขจากสมการเดิมยังคงมีผลหลังคุณกำจัดตัวส่วนหรือตัดทอนนิพจน์
- จำนวนคำตอบที่แตกต่างกันนับค่าซ้ำเพียงครั้งเดียว แต่สูตรความสัมพันธ์ของรากตามดีกรีนับรากซ้ำตามจำนวนครั้งที่เกิด
- ปริมาณความยาว พื้นที่ เวลา และอัตราต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขของสถานการณ์ และระบุหน่วยของคำตอบ

เรียบเรียงโดย MathStandard สำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง สมการกำลังสอง

สารบัญ

ตอนที่ 1 รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–8 8

ตอนที่ 2 การถอดรากและสูตรสมการกำลังสอง

เนื้อหาและตัวอย่าง 11

แบบฝึกหัดข้อ 9–16 16

ตอนที่ 3 จำนวนคำตอบและพารามิเตอร์

เนื้อหาและตัวอย่าง 20

แบบฝึกหัดข้อ 17–26 24

ตอนที่ 4 ความสัมพันธ์ของรากสมการกำลังสอง

เนื้อหาและตัวอย่าง 28

แบบฝึกหัดข้อ 27–36 32

ตอนที่ 5 สมการเศษส่วนและการแทนอัตราส่วน

เนื้อหาและตัวอย่าง 36

แบบฝึกหัดข้อ 37–40 39

ตอนที่ 6 โจทย์ประยุกต์สมการกำลังสอง

เนื้อหาและตัวอย่าง 41

แบบฝึกหัดข้อ 41–46 45

เรื่อง สมการกำลังสอง

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 สมการดีกรีสูงที่ลดรูปได้

เนื้อหาและตัวอย่าง	48
--------------------	----

แบบฝึกหัดข้อ 47–54	52
--------------------	----

ตอนที่ 8 ความสัมพันธ์ของรากสมการดีกรีสูง

เนื้อหาและตัวอย่าง	56
--------------------	----

แบบฝึกหัดข้อ 55–66	63
--------------------	----

เฉลยคำตอบ	69
-----------	----

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	75
---------------------	----

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

1.1 สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

สมการเป็นข้อความที่แสดงความเท่ากันของนิพจน์สองข้าง คำตอบของสมการ คือค่าของตัวแปรที่เมื่อนำไปแทนแล้วทำให้ข้อความนั้นเป็นจริง การแก้สมการจึงต้องหาค่าที่ทำให้ทั้งสองข้างเท่ากันทั้งหมดตามขอบเขตที่กำหนด

รูปมาตรฐาน

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

เมื่อ x เป็นตัวแปร และ a, b, c เป็นค่าคงตัวจริง โดย a เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^2 , b เป็นสัมประสิทธิ์ของ x และ c เป็นพจน์คงตัว

เงื่อนไข $a \neq 0$ ทำให้กำลังสูงสุดของตัวแปรเป็น 2 ถ้า $a = 0$ สมการจะไม่ใช่สมการกำลังสอง แม้เดิมจะเขียนพจน์ ax^2 ไว้ก็ตาม

ตัวอย่าง 1 จงระบุสัมประสิทธิ์ของ $5x^2 - 3x = 8$

วิธีคิด ลบ 8 ทั้งสองข้าง ได้ $5x^2 - 3x - 8 = 0$ ดังนั้นพจน์คงตัวมีเครื่องหมายลบ

ตอบ $a = 5, b = -3, c = -8$

ตัวอย่าง 2 จงพิจารณาว่า $x(x + 2) = x^2 + 7$ เป็นสมการกำลังสองหรือไม่

วิธีคิด กระจายพจน์ซ้ายแล้วลบ x^2 ทั้งสองข้าง ได้ $2x = 7$ พจน์กำลังสองหักล้างกันทั้งหมด

ตอบ ไม่ใช่สมการกำลังสอง

การจัดรูปก่อนอ่านสัมประสิทธิ์

ควรกระจายวงเล็บ รวมพจน์คล้าย และจัดให้ข้างหนึ่งเป็นศูนย์ก่อนระบุ a, b, c โดยต้องนำเครื่องหมายหน้าพจน์มารวมกับสัมประสิทธิ์ด้วย หากไม่มีพจน์ x ให้ใช้ $b = 0$ และหากไม่มีพจน์คงตัวให้ใช้ $c = 0$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

1.2 การตรวจคำตอบและการแปลงสมการ

การบวกหรือลบจำนวนเดียวกันทั้งสองข้าง และการคูณหรือหารทั้งสองข้างด้วยจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์ ไม่เปลี่ยนชุดคำตอบของสมการ อย่างไรก็ตาม หากคูณหรือหารด้วยนิพจน์ที่มีตัวแปร ต้องพิจารณาว่านิพจน์นั้นอาจเป็นศูนย์หรือไม่

ตัวอย่าง 3 ในจำนวน $-1, 2, 3$ จำนวนใดเป็นคำตอบของ $x^2 - 2x - 3 = 0$

วิธีคิด แทนค่าทีละจำนวนลงในข้างซ้าย

$$x = -1 : \quad 1 + 2 - 3 = 0$$

$$x = 2 : \quad 4 - 4 - 3 = -3$$

$$x = 3 : \quad 9 - 6 - 3 = 0$$

ค่าที่ทำให้ข้างซ้ายเป็นศูนย์คือ -1 และ 3

ตอบ $-1, 3$

สมบัติผลคูณเป็นศูนย์

สำหรับจำนวนจริง U, V

$$UV = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U = 0 \text{ หรือ } V = 0$$

หากมีหลายตัวประกอบ ผลคูณเป็นศูนย์เมื่อมีตัวประกอบอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นศูนย์

สมบัตินี้ใช้กับ **ผลคูณ** ที่เท่ากับศูนย์ เช่น $(x - 2)(x + 5) = 0$ ส่วน $U + V = 0$ ไม่ได้หมายความว่า U หรือ V ต้องเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 4 จงแก้สมการ $4x^2 - 20x = 0$

วิธีคิด ดึงตัวร่วมได้ $4x(x - 5) = 0$ จึง $x = 0$ หรือ $x = 5$ หากหารสมการด้วย x ตั้งแต่ต้นจะทำให้กรณี $x = 0$ สูญหาย

ตอบ $0, 5$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

1.3 การแยกตัวประกอบ

เมื่อจัดสมการให้ข้างหนึ่งเป็นศูนย์แล้ว สามารถเขียนพหุนามเป็นผลคูณ และใช้สมบัติผลคูณเป็นศูนย์แก้สมการของแต่ละตัวประกอบ

รูปที่ใช้ในการแยกตัวประกอบ

$$x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

ตัวอักษรในแต่ละสูตรแทนจำนวนหรือนิพจน์ที่กำหนด

ตัวอย่าง 5 จงแก้สมการ $x^2 - 2x - 15 = 0$

วิธีคิด ต้องการจำนวนสองจำนวนที่มีผลบวก -2 และผลคูณ -15 คือ $-5, 3$ จึงได้

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

แยกพิจารณา $x - 5 = 0$ หรือ $x + 3 = 0$

ตอบ $-3, 5$

ตัวอย่าง 6 จงแก้สมการ $4x^2 - 25 = 0$

วิธีคิด เขียนเป็นผลต่างกำลังสอง

$$(2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5) = 0$$

ได้ $2x = 5$ หรือ $2x = -5$

ตอบ $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

1.4 สัมประสิทธิ์นำไม่เท่ากับหนึ่ง

หากทุกพจน์มีตัวร่วมที่เป็นจำนวนไม่เป็นศูนย์ อาจหารสมการด้วยตัวร่วมนั้นก่อนแยกตัวประกอบ ส่วนการแยก $ax^2 + bx + c$ อาจแยกพจน์กลางเป็นสองพจน์แล้วใช้วิธีการจัดกลุ่ม

ตัวอย่าง 7 จงแก้สมการ $6x^2 + x - 2 = 0$

วิธีคิด ผลคูณ $ac = 6(-2) = -12$ ต้องการจำนวนที่บวกกันได้ 1 และคูณกันได้ -12 คือ 4, -3

$$\begin{aligned} 6x^2 + x - 2 &= 6x^2 + 4x - 3x - 2 \\ &= 2x(3x + 2) - (3x + 2) \\ &= (3x + 2)(2x - 1) \end{aligned}$$

จึง $3x + 2 = 0$ หรือ $2x - 1 = 0$

ตอบ $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

รากซ้ำและจำนวนคำตอบ

คำว่า **รากของสมการ** ใช้แทนคำตอบของสมการได้ เมื่อพหุนามมีตัวประกอบเต็มซ้ำ เช่น $(x - 4)^2$ จะเรียก 4 ว่ารากซ้ำสองครั้ง แต่สมการมีคำตอบที่แตกต่างกันเพียงค่าเดียว

ตัวอย่าง 8 จงหาคำตอบของ $2x^2 - 16x + 32 = 0$

วิธีคิด หารด้วย 2 ได้ $x^2 - 8x + 16 = 0$ หรือ $(x - 4)^2 = 0$ จึงต้องมี $x - 4 = 0$

ตอบ $x = 4$ มีคำตอบที่แตกต่างกัน 1 ค่า

การเลือกคำตอบตามเงื่อนไข

เมื่อโจทย์ถามรากที่มากกว่า รากที่น้อยกว่า หรือรากที่มีเครื่องหมายกำหนด ควรหาคำตอบทั้งหมดก่อน แล้วจึงเลือกค่าที่ผ่านเงื่อนไข ไม่ใช่เครื่องหมายของสัมประสิทธิ์เพียงพจน์เดียวตัดสินเครื่องหมายของราก

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-3

รูปมาตรฐานและการแยกตัวประกอบ

ข้อ 1 จงจัดสมการ $3x(x - 2) = x + 5$ ให้อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ และระบุ a, b, c

ตอบ _____

ข้อ 2 ในจำนวน $-2, 0, 3$ จำนวนใดเป็นคำตอบของ $x^2 - x - 6 = 0$

ตอบ _____

ข้อ 3 จงหาคำตอบจริงทั้งหมดของ $4x^2 = 196$

ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2

การถอดรากและสูตรสมการกำลังสอง

2.1 การถอดรากที่สอง

สำหรับจำนวนจริง $k \geq 0$ สัญลักษณ์ $\sqrt{k}$ หมายถึงรากที่สองที่ไม่เป็นลบ แต่สมการ $u^2 = k$ อาจมีคำตอบทั้งบวกและลบ การเขียน $\pm\sqrt{k}$ จึงหมายถึงสองกรณีคือ $\sqrt{k}$ และ $-\sqrt{k}$

สมการในรูปกำลังสอง

$(x - h)^2 = k$	คำตอบจริง
$k > 0$	$x = h - \sqrt{k}, h + \sqrt{k}$
$k = 0$	$x = h$
$k < 0$	ไม่มีคำตอบจริง

เมื่อ h, k เป็นค่าคงตัวจริง

ตัวอย่าง 9 จงแก้สมการ $(x + 2)^2 = 18$

วิธีคิด ได้ $x + 2 = \sqrt{18}$ หรือ $x + 2 = -\sqrt{18}$ และ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ จึงลบ 2 ทั้งสองข้าง

ตอบ $-2 - 3\sqrt{2}, -2 + 3\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 10 จงแก้สมการ $3(x - 1)^2 + 12 = 0$ ในระบบจำนวนจริง

วิธีคิด จัดรูปได้ $(x - 1)^2 = -4$ แต่กำลังสองของจำนวนจริงไม่เป็นลบ

ตอบ ไม่มีคำตอบจริง

การรักษาความหมายของเครื่องหมาย

ตัวอย่างเช่น $\sqrt{25} = 5$ แต่สมการ $x^2 = 25$ มีคำตอบ $x = 5$ และ $x = -5$ ทั้งสองข้อความมีความหมายต่างกัน จึงไม่เขียน $\sqrt{25} = \pm 5$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

การถอดรากและสูตรสมการกำลังสอง

2.2 การทำกำลังสองสมบูรณ์

พิจารณา $x^2 + px$ จากการกระจาย $(x + \frac{p}{2})^2$ จะมีพจน์คงตัวเพิ่มขึ้น $(\frac{p}{2})^2$ ดังนั้นต้องบวกแล้วลบพจน์ดังกล่าวหากต้องการรักษาค่าของนิพจน์เดิม

การเติมและลบพจน์เดียวกัน

$$\begin{aligned}x^2 + px + q &= x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \\&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\end{aligned}$$

ถ้าอยู่ในรูปสมการ $x^2 + px = -q$ ให้บวก $(\frac{p}{2})^2$ ทั้งสองข้างแทน

ตัวอย่าง 11 จงแก้สมการ $x^2 + 4x - 5 = 0$ โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีคิด ย้ายพจน์คงตัว และบวก $(\frac{4}{2})^2 = 4$ ทั้งสองข้าง

$$x^2 + 4x = 5$$

$$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 9$$

$$x + 2 = \pm 3$$

จึง $x = -2 + 3 = 1$ หรือ $x = -2 - 3 = -5$

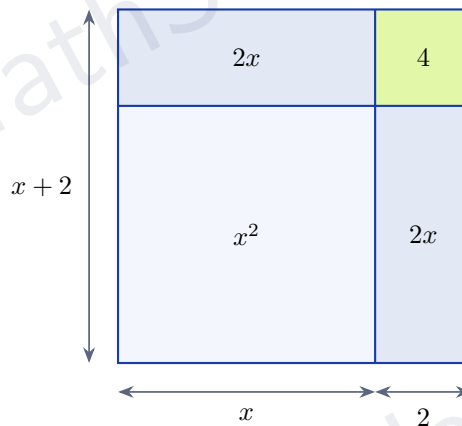
ตอบ $-5, 1$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

การถอดรากและสูตรสมการกำลังสอง

2.3 ภาพแสดงแนวคิดกำลังสองสมบูรณ์

เมื่อ $x > 0$ พื้นที่ $x^2 + 4x$ แทนด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้าน x และแถบสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองแถบขนาด $x \times 2$ เมื่อเติมมุมขนาด 2×2 จะได้สี่เหลี่ยมจัตุรัสด้าน $x + 2$



จึงเห็นว่า $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ ภาพนี้อธิบายด้วยความยาวที่เป็นบวก ส่วนเอกลักษณ์ทางพีชคณิตดังกล่าวเป็นจริงสำหรับ x ทุกจำนวนจริง

ตัวอย่าง 12 จงหาค่า c ที่ทำให้ $x^2 - 10x + c$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีคิด เทียบกับ $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$ หรือนำครึ่งหนึ่งของ -10 ไปยกกำลังสอง ได้ $c = (-5)^2$

ตอบ 25

กำลังสองสมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์นำเป็นบวก

$ax^2 + bx + c$ เป็นกำลังสองของพหุนามดีกรีหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์จริง ก็ต่อเมื่อ $a > 0$ และ $b^2 - 4ac = 0$ โดยเขียนได้เป็น

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2$$

เงื่อนไข $b^2 - 4ac = 0$ ให้ $c = \frac{b^2}{4a}$ ซึ่งตรงกับพจน์คงตัวเมื่อกระจายกำลังสอง

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 2 | ข้อ 9-10

การถอดรากและสูตรสมการกำลังสอง

ข้อ 9 จงหาคำตอบที่มากกว่าของ $(x - 4)^2 = 13$

ตอบ _____

ข้อ 10 จงแก้สมการ $x^2 + 6x - 2 = 0$ โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

ตอบ _____