



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.4

เอกสารประกอบการเรียน คณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส มุ่งพัฒนา ความ เข้าใจ ความสัมพันธ์ระหว่างความยาว ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก และการใช้เหตุผลทางเรขาคณิต ร่วมกับการ คำนวณทางพีชคณิต

เนื้อหาเริ่มจากองค์ประกอบของสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ แล้วพัฒนาไปสู่พื้นที่เส้นสูง การใช้ความสูงร่วม รูปสามเหลี่ยมต่อเนื่อง ระยะทาง และเส้นทแยงมุมในรูปทรงสามมิติ โดยแสดงที่มาของความสัมพันธ์และเงื่อนไขการนำไปใช้

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การ ประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง โดยเชื่อมโยงอัตราส่วน ความคล้าย พื้นที่ สมการ และกรณี ผู้เรียนควรมีพื้นฐานการยกกำลังสอง รากที่สอง การจัดรูปสมการ และสมบัติของรูปเรขาคณิต

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

เมื่อกำหนดชื่อจุดยอดสามเหลี่ยมเป็น A, B, C ใช้ $a = BC$, $b = CA$ และ $c = AB$ แทนความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ ชื่อด้านคงเดิมเมื่อเปลี่ยนมุมที่พิจารณา ส่วนด้านตรงข้ามมุมฉากขึ้นอยู่กับตำแหน่งมุมฉากของแต่ละรูป

ใช้ Area แทนพื้นที่ของรูปที่พิจารณา หากมีหลายรูปจะระบุชื่อรูปหรือดัชนีกำกับ

- AB หมายถึงความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A และ B เมื่อใช้ในสมการเกี่ยวกับความยาว
- $AB \perp BC$ หมายถึงเส้นทั้งสองตั้งฉากกัน ส่วน $AB \parallel CD$ หมายถึงเส้นทั้งสองขนานกัน
- ตัวแปรแทนความยาวเป็นจำนวนบวก และข้อมูลที่นำมาคำนวณร่วมกันต้องใช้หน่วยเดียวกัน
- กำลังสองของความยาวและพื้นที่ใช้หน่วยกำลังสอง ส่วนปริมาตรใช้หน่วยกำลังสาม
- คำตอบใช้ค่าที่แน่นอนในรูปจำนวนเต็ม เศษส่วน หรือกรณีทศนิยม แต่ระบุให้ประมาณค่า
- รูปประกอบใช้แสดงตำแหน่งและความสัมพันธ์ คำนวณจากเงื่อนไขที่กำหนด โดยไม่ใช้การวัดจากรูป

เรียบเรียงโดย MathStandard สำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สารบัญ

ตอนที่ 1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

เนื้อหาและตัวอย่าง	3
แบบฝึกหัดข้อ 1–10	10

ตอนที่ 2 พื้นที่และความสัมพันธ์ของด้าน

เนื้อหาและตัวอย่าง	14
แบบฝึกหัดข้อ 11–20	23

ตอนที่ 3 เส้นสูงจากมุมฉาก

เนื้อหาและตัวอย่าง	28
แบบฝึกหัดข้อ 21–30	34

ตอนที่ 4 การใช้ความสูงร่วม

เนื้อหาและตัวอย่าง	38
แบบฝึกหัดข้อ 31–40	45

ตอนที่ 5 ระยะทางและสามเหลี่ยมต่อเนื่อง

เนื้อหาและตัวอย่าง	49
แบบฝึกหัดข้อ 41–50	57

ตอนที่ 6 สี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปทรงสามมิติ

เนื้อหาและตัวอย่าง	62
แบบฝึกหัดข้อ 51–60	71

เฉลยคำตอบ	75
-----------	----

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	78
---------------------	----

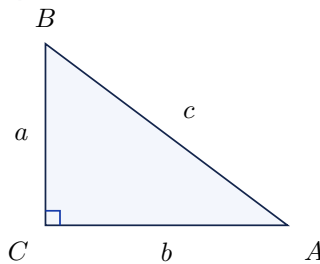
เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

1.1 ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

สามเหลี่ยมมุมฉากมีมุมหนึ่งเท่ากับ 90° ด้านสองด้านที่พบกัน ณ มุมฉากเรียกว่า **ด้านประกอบมุมฉาก** ส่วนด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉากเรียกว่า **ด้านตรงข้ามมุมฉาก** ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดของรูป

ชนิดของด้านพิจารณาจากตำแหน่งของมุมฉาก การหมุนหรือพลิกรูปไม่เปลี่ยนความสัมพันธ์ของด้าน



$a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ และมุม C เป็นมุมฉาก จึงมี c เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ในสามเหลี่ยม ABC ที่มี $C = 90^\circ$ ด้าน a, b, c อยู่ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ จึงมีด้านประกอบมุมฉากยาว a, b และด้านฉากยาว c ดังนั้น

$$c^2 = a^2 + b^2$$

โดย a, b, c เป็นความยาวบวกที่ใช้หน่วยเดียวกัน

ตัวอย่าง 1 สามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านประกอบมุมฉากยาว 9 และ 12 หน่วย จงหาด้านตรงข้ามมุมฉาก

วิธีคิด ให้ c เป็นความยาวด้านที่ต้องการ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$c^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

ดังนั้น $c = \sqrt{225} = 15$ เนื่องจากความยาวเป็นบวก

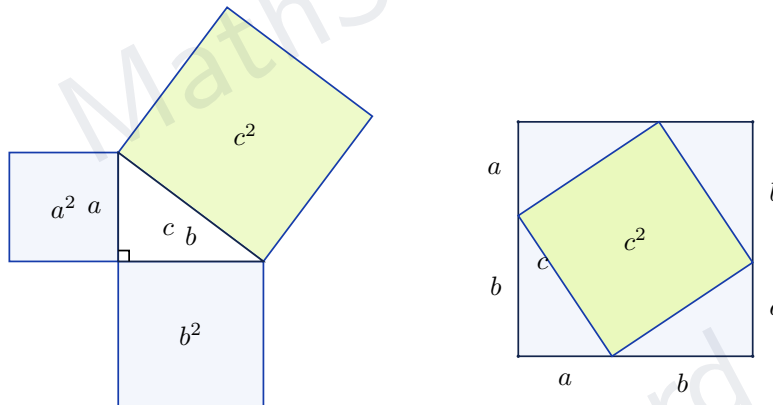
ตอบ 15 หน่วย

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

1.2 ความหมายของกำลังสองและที่มาของทฤษฎีบท

ถ้าสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่สี่เหลี่ยมบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมบนด้านประกอบมุมฉาก



ซ้าย: ความสัมพันธ์ของพื้นที่ ขวา: การจัดรูปเพื่อพิสูจน์

รูปขวาเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านยาว $a + b$ ภายในประกอบด้วยสามเหลี่ยมมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ 4 รูป และสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านยาว c ตรงกลาง มุมของรูปตรงกลางเป็นมุมฉาก เพราะมุมแหลมสองมุมของสามเหลี่ยมรวมกันได้ 90°

เมื่อคำนวณพื้นที่รูปใหญ่สองแบบ จะได้

$$(a + b)^2 = 4 \left(\frac{1}{2} ab \right) + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

สูตรเป็นความสัมพันธ์ของ กำลังสองของความยาว จึงไม่ใช่ $c = a + b$ และโดยทั่วไป $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

ตัวอย่าง 2 ด้านประกอบมุมฉากยาว 4 และ 7 หน่วย จงหาด้านตรงข้ามมุมฉาก

วิธีคิด ให้ความยาวเป็น $c > 0$ จะได้ $c^2 = 4^2 + 7^2 = 65$ ดังนั้น $c = \sqrt{65}$ โดยเก็บคำตอบในรูปกรณฑ์ได้ เนื่องจาก 65 ไม่มีตัวประกอบกำลังสองที่มากกว่า 1

ตอบ $\sqrt{65}$ หน่วย

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

1.3 การหาด้านประกอบมุมฉาก

เมื่อทราบด้านตรงข้ามมุมฉากและด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่ง ให้เริ่มจากสมการเดิม แล้วลบกำลังสองของด้านที่ทราบออกจากทั้งสองข้าง

หาด้านที่ยังไม่ทราบ

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

สูตรนี้ใช้เมื่อมุม C เป็นมุมฉาก ด้าน c จึงอยู่ตรงข้ามมุมฉาก และมี $c > b > 0$

ตัวอย่าง 3 เสาค้ำยาว 13 เมตรพาดจากพื้นถึงผนังแนวดิ่ง โดยปลายบนสูงจากพื้น 12 เมตร จงหาระยะปลายล่างจากผนัง

วิธีคิด ผนังกับผนังตั้งฉากกัน เสาค้ำจึงเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ให้ระยะที่ต้องการเป็น x เมตร

$$x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 144 = 25$$

จึงได้ $x = 5$ และตรวจได้ว่า $5^2 + 12^2 = 13^2$

ตอบ 5 เมตร

1.4 ความยาวด้านที่เป็นนิพจน์

หากโจทย์กำหนดด้านเป็นนิพจน์ของตัวแปร ให้ใช้ความสัมพันธ์เดิมสร้างสมการ แล้วตรวจว่าค่าที่ได้ทำให้ความยาวทุกด้านเป็นบวก

ตัวอย่าง 4 ด้านประกอบมุมฉากยาว 12 และ x หน่วย ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $x + 6$ หน่วย จงหา x

วิธีคิด แทนความยาวลงในทฤษฎีบทแล้วกระจายกำลังสอง

$$12^2 + x^2 = (x + 6)^2$$

$$144 + x^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$108 = 12x$$

จึงได้ $x = 9$ และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 15 หน่วย ซึ่งให้ $9^2 + 12^2 = 15^2$

ตอบ 9

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

1.5 ชุดจำนวนพีทาโกรัสและการย่อขยาย

จำนวนเต็มบวกสามจำนวน a, b, c ที่ทำให้ $a^2 + b^2 = c^2$ เรียกว่า **ชุดจำนวนพีทาโกรัส** ตารางต่อไปนี้ เป็นชุดที่ใช้บ่อย โดยจำนวนในคอลัมน์สุดท้ายเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
12	35	37
20	21	29

เมื่อคูณความยาวทั้งสามด้วยจำนวนบวก k จะยังคงเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะ

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2$$

ตัวอย่างเช่น $3 : 4 : 5$ ให้ชุด $6, 8, 10$ เมื่อคูณด้วย 2 และให้ชุด $1.5, 2, 2.5$ เมื่อคูณด้วย 0.5 การย่อหรือขยายต้องใช้ตัวคูณเดียวกันกับทุกด้าน

ตัวอย่าง 5 สามเหลี่ยมมุมฉากมีอัตราส่วนด้านประกอบมุมฉาก $5 : 12$ และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 39 หน่วย จงหาด้านทั้งสอง

วิธีคิด ให้ $t > 0$ เป็นตัวคูณร่วมของอัตราส่วน จึงกำหนดด้านประกอบมุมฉากยาว $5t, 12t$ หน่วย จากชุดจำนวนพีทาโกรัส $5, 12, 13$ ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $13t$ หน่วย จึงมี $13t = 39$ และ $t = 3$ ดังนั้นด้านประกอบมุมฉากยาว $15, 36$ หน่วย

ตอบ 15 และ 36 หน่วย

การจำชุดจำนวนช่วยตรวจคำตอบ แต่ยังคงต้องตรวจว่าด้านที่ยาวที่สุดตรงกับด้านตรงข้ามมุมฉาก

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

1.6 บทกลับและการจำแนกชนิดสามเหลี่ยม

ก่อนจำแนกชนิดของมุม ต้องตรวจสอบว่าความยาวสร้างสามเหลี่ยมได้ ให้เรียง $0 < a \leq b \leq c$ จะสร้างสามเหลี่ยมได้เมื่อ $a + b > c$ หาก $a + b = c$ จุดทั้งสามจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เมื่อทราบเพียงสองด้านยาว a, b ด้านที่สามยาว x ต้องสอดคล้องกับ $|a - b| < x < a + b$

พิจารณาด้านที่ยาวที่สุด

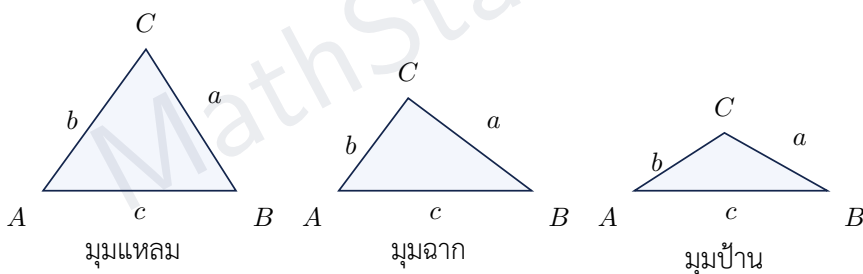
เมื่อ c ยาวที่สุดและสร้างสามเหลี่ยมได้แล้ว

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies \text{สามเหลี่ยมมุมฉาก}$$

$$c^2 < a^2 + b^2 \implies \text{สามเหลี่ยมมุมแหลม}$$

$$c^2 > a^2 + b^2 \implies \text{สามเหลี่ยมมุมป้าน}$$

กรณีเท่ากันคือ **บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส**



มุม C อยู่ตรงข้ามด้าน c ซึ่งยาวที่สุด

ตัวอย่าง 6 จงจำแนกชุดความยาว $(6, 8, 10)$, $(6, 8, 9)$ และ $(6, 8, 11)$

วิธีคิด ทุกชุดสร้างสามเหลี่ยมได้ เพราะผลบวกด้านสั้นสองด้านคือ 14 มากกว่าด้านยาวที่สุด เปรียบเทียบกับ $6^2 + 8^2 = 100$ ได้ $10^2 = 100$, $9^2 = 81 < 100$ และ $11^2 = 121 > 100$ ตามลำดับ

ตอบ มุมฉาก มุมแหลม และมุมป้าน ตามลำดับ

ตัวอย่าง 7 ด้านสองด้านยาว 5, 9 หน่วย ถ้าด้านที่สามเป็นจำนวนเต็ม จะเป็นไปได้กี่ค่า

วิธีคิด ให้ด้านที่สามเป็น x จะได้ $9 - 5 < x < 9 + 5$ หรือ $4 < x < 14$ จำนวนเต็มที่เป็นไปได้คือ 5, 6, ..., 13 รวม 9 ค่า

ตอบ 9 ค่า

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-3

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

ข้อ 1 แผ่นป้ายรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านประกอบมุมฉากยาว 20 และ 21 เซนติเมตร จงหาความยาวด้านที่เหลือ

ตอบ _____

ข้อ 2 โครงค้ำรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 2.5 เมตร และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 0.7 เมตร จงหาความยาวอีกด้านหนึ่ง

ตอบ _____

ข้อ 3 สามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้า $AC = 10$ และ $BC = 6\sqrt{2}$ หน่วย จงหา AB

ตอบ _____

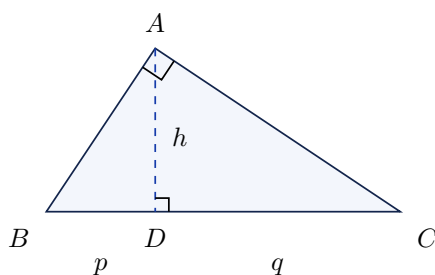
เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 3

เส้นสูงจากมุมฉาก

3.1 เส้นสูงจากมุมฉากลงสู่ด้านตรงข้ามมุมฉาก

กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก ลาก $AD \perp BC$ โดย D อยู่บนด้าน BC เส้น AD เป็นเส้นสูงที่แบ่งรูปเดิมเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป

ให้ $BD = p$, $DC = q$ และ $AD = h$ โดย $p, q, h > 0$ ดังนั้นด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปใหญ่ยาว $BC = p + q$



มุมฉากของรูปใหญ่คือมุม A ส่วนมุมฉากของรูปย่อยอยู่ที่ D

ความสัมพันธ์จากความคล้าย

สามเหลี่ยม ABD และ CAD คล้ายกัน เพราะมีมุมฉากที่ D และมุมแหลมคู่หนึ่งเท่ากัน โดยมุม ABD เท่ากับมุม CAD

ด้าน BD สมัยกับ AD และด้าน AD สมัยกับ CD จึงได้

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow AD^2 = BD \cdot CD$$

เส้นสูงกำลังสองเท่ากับผลคูณของฐานสองส่วน

$$h^2 = pq \quad h = \sqrt{pq}$$

ใช้เมื่อเส้นสูงลากจาก **มุมฉากของสามเหลี่ยมใหญ่** ลงสู่ด้านตรงข้ามมุมฉากเท่านั้น

ตัวอย่าง 18 เส้นสูงแบ่งด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นส่วนยาว 9, 16 หน่วย จงหาความสูง

วิธีคิด ให้ p, q แทนความยาวฐานสองส่วนที่เส้นสูงแบ่งไว้ และให้ h แทนความสูง หน่วยความยาว แทน $p = 9, q = 16$ ใน $h^2 = pq$ ได้ $h^2 = 9(16) = 144$ จึงได้ $h = 12$ หน่วย

ตอบ 12 หน่วย

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 3 (ต่อ)

เส้นสูงจากมุมฉาก

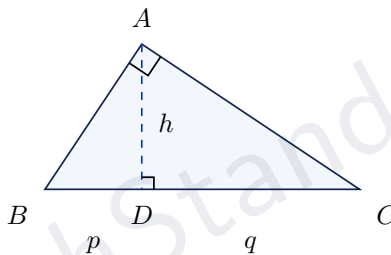
3.2 การหาฐานอีกส่วนและฐานทั้งเส้น

หากทราบเส้นสูงกับฐานส่วนหนึ่ง จะหาฐานอีกส่วนจากผลคูณ $h^2 = pq$ ได้ ส่วนฐานทั้งหมดเป็นผลบวกของฐานสองส่วน ไม่ใช่ผลต่าง

จัดรูปสมการตามสิ่งที่ต้องการหา

$$p = \frac{h^2}{q} \quad q = \frac{h^2}{p} \quad BC = p + q$$

ตัวหาร p, q เป็นความยาวบวก



ข้อ p, q อาจสลับซ้ายขวาได้ แต่ต้องใช้ให้สอดคล้องตลอดวิธีคิด

ตัวอย่าง 19 เส้นสูงยาว 10 หน่วย และฐานส่วนหนึ่งยาว 5 หน่วย จงหาฐานอีกส่วนและฐานทั้งหมด

วิธีคิด ให้ $p = 5$ แทนความยาวฐานส่วนที่ทราบ ให้ q แทนความยาวฐานอีกส่วน และให้ $h = 10$ แทนความสูง หน่วยความยาว จาก $h^2 = pq$ ได้ $10^2 = 5q$ จึงมี $q = 20$ หน่วย ฐานทั้งหมดเท่ากับ $p + q = 5 + 20 = 25$ หน่วย

ตอบ อีกส่วนยาว 20 หน่วย ฐานทั้งหมด 25 หน่วย

ตัวอย่าง 20 เส้นสูงยาว 6 หน่วย และฐานส่วนหนึ่งยาว 8 หน่วย จงหาฐานอีกส่วน

วิธีคิด ให้ $h = 6$ แทนความสูง ให้ $p = 8$ แทนความยาวฐานส่วนที่ทราบ และให้ q แทนความยาวฐานอีกส่วน หน่วยความยาว จาก $h^2 = pq$ ได้ $q = h^2/p = 36/8 = 9/2$ หน่วย ตรวจสอบได้ว่า $8(9/2) = 36 = h^2$

ตอบ $\frac{9}{2}$ หน่วย

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 3 (ต่อ)

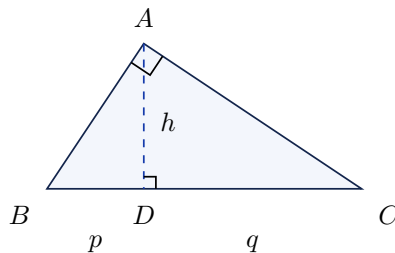
เส้นสูงจากมุมฉาก

3.3 ด้านประกอบมุมฉากกับส่วนของฐาน

จากสามเหลี่ยมย่อย ABD และความสัมพันธ์ $AD^2 = pq$ จะได้

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = pq + p^2 = p(p + q)$$

ในทำนองเดียวกัน $AC^2 = pq + q^2 = q(p + q)$ สูตรทั้งสองจึงเป็นผลจากพีทาโกรัสร่วมกับสูตรเส้นสูง



AB อยู่ติดกับส่วนของฐาน $BD = p$ ส่วน AC อยู่ติดกับ $DC = q$

จับคู่ด้านกับส่วนของฐานที่อยู่ติดกัน

$$AB^2 = BC \cdot BD = (p + q)p$$

$$AC^2 = BC \cdot DC = (p + q)q$$

ตัวอย่าง 21 สามเหลี่ยม ABC มีมุมฉากที่ A ลาก $AD \perp BC$ โดย D อยู่บน BC ถ้า $BD = 4$, $DC = 9$ หน่วย จงหา AB และ AC

วิธีคิด ฐานทั้งหมด $BC = 4 + 9 = 13$ หน่วย จึงได้ $AB^2 = 13(4) = 52$ และ $AC^2 = 13(9) = 117$ ดังนั้น $AB = 2\sqrt{13}$ และ $AC = 3\sqrt{13}$ หน่วย

ตรวจด้วยรูปใหญ่ได้ $AB^2 + AC^2 = 52 + 117 = 169 = 13^2$

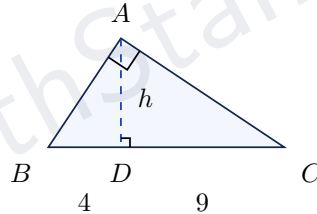
ตอบ $AB = 2\sqrt{13}$ และ $AC = 3\sqrt{13}$ หน่วย

ไม่ใช่ส่วนของฐานฝั่งตรงข้ามกับด้านที่กำลังหา ควรเขียนสูตรด้วยชื่อจุดก่อนแทนค่าตัวเลข

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 3 | ข้อ 21-23

เส้นสูงจากมุมฉาก

ข้อ 21 สามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก และ $AD \perp BC$ โดย D อยู่บน BC ถ้า $BD = 4$, $DC = 9$ หน่วย จงหา AD



ตอบ _____

ข้อ 22 สามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก และ $AD \perp BC$ โดย D อยู่บน BC ถ้า $BD = 5$, $DC = 12$ หน่วย จงหา AD

ตอบ _____

ข้อ 23 สามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก และ $AD \perp BC$ โดย D อยู่บน BC ถ้า $AD = 12$, $DC = 18$ หน่วย จงหา BD

ตอบ _____