



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง พหุนาม

www.mathstandard.com

เรื่อง พหุนาม

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.3

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง พหุนาม มุ่งพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับนิพจน์ทางพีชคณิต การดำเนินการของพหุนาม และการใช้เอกลักษณ์ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหา โดยเน้นความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบของนิพจน์กับวิธีคำนวณ ตลอดจนความถูกต้องของสัญลักษณ์และเงื่อนไข

เนื้อหาเริ่มจากเอกนาม พจน์คล้าย ดีกรี และการบวก ลบ คูณพหุนาม แล้วศึกษาสูตรกำลังสองและกำลังสาม ทวินาม การแยกตัวประกอบ การจัดกำลังสองสมบูรณ์ การหารพหุนาม ทฤษฎีบทเศษเหลือ และเศษส่วนพหุนาม ก่อนเชื่อมโยงสู่สมการและปัญหาประยุกต์

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การ ประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษา ปีที่ 4 และ แนว ข้อสอบ แข่งขัน ที่ เกี่ยวข้อง โดย เชื่อมโยง จำนวนเต็ม เลขยกกำลัง จำนวนจริง สมการ และ เรขาคณิต ผู้เรียน ควร มี พื้นฐาน การดำเนินการ กับ จำนวน และ สมบัติ ของ เลขยกกำลัง

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- ตัวแปรและสัมประสิทธิ์มีค่าเป็นจำนวนจริง เว้นแต่กำหนดไว้เป็นอย่างอื่น พหุนามศูนย์ไม่กำหนดดีกรี
- การแยกตัวประกอบในแบบฝึกหัดให้ใช้ตัวประกอบที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม เว้นแต่โจทย์ระบุขอบเขตอื่น รูปผลคูณที่สลับลำดับตัวประกอบถือว่าเท่ากัน
- เศษส่วนต้องมีตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ และในการหารเศษส่วน ตัวหารต้องไม่เท่ากับศูนย์ เงื่อนไขจากนิพจน์เดิมยังคงใช้หลังตัดทอน
- คำตอบของสมการให้ระบุค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด โดยนับค่าที่ซ้ำกันเพียงครั้งเดียว และปริมาณที่มีหน่วยต้องระบุหน่วย

เรื่อง พหุนาม

สารบัญ

ตอนที่ 1 เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

เนื้อหาและตัวอย่าง 4

แบบฝึกหัดข้อ 1–12 9

ตอนที่ 2 เอกลักษณะ ทวินาม และสามเหลี่ยมปาสคาล

เนื้อหาและตัวอย่าง 14

แบบฝึกหัดข้อ 13–24 19

ตอนที่ 3 การแยกตัวประกอบพื้นฐาน

เนื้อหาและตัวอย่าง 24

แบบฝึกหัดข้อ 25–36 27

ตอนที่ 4 การแยกตัวประกอบโดยใช้รูปแบบของนิพจน์

เนื้อหาและตัวอย่าง 32

แบบฝึกหัดข้อ 37–48 37

ตอนที่ 5 กำลังสองสมบูรณ์และเอกลักษณ์ประยุกต์

เนื้อหาและตัวอย่าง 42

แบบฝึกหัดข้อ 49–60 47

ตอนที่ 6 การหารยาวและการหารสังเคราะห์

เนื้อหาและตัวอย่าง 52

แบบฝึกหัดข้อ 61–68 55

เรื่อง พหุนาม

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 เศษเหลือ ตัวประกอบ และค่าพหุนาม

เนื้อหาและตัวอย่าง	59
แบบฝึกหัดข้อ 69–82	64

ตอนที่ 8 เศษส่วนของพหุนาม

เนื้อหาและตัวอย่าง	70
แบบฝึกหัดข้อ 83–92	74

ตอนที่ 9 การประยุกต์สมการพหุนาม

เนื้อหาและตัวอย่าง	78
แบบฝึกหัดข้อ 93–108	84
เฉลยคำตอบ	92
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	98

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

1.1 เอกนาม สัมประสิทธิ์ และดีกรี

เอกนามเป็นนิพจน์ที่เขียนได้เป็นผลคูณของค่าคงตัวกับตัวแปร โดยเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ค่าคงตัวที่เป็นตัวคูณเรียกว่า **สัมประสิทธิ์** และผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวเรียกว่า **ดีกรีของเอกนาม**

รูปของเอกนาม

ax^my^n เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ m, n เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

ถ้า $a \neq 0$ สัมประสิทธิ์เท่ากับ a และดีกรีเท่ากับ $m + n$

เอกนาม	สัมประสิทธิ์	ดีกรี
$-6x^3y^2$	-6	$3 + 2 = 5$
x^4	1	4
$-xy$	-1	$1 + 1 = 2$
8	8	0
0	0	ไม่กำหนดดีกรี

ค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์มีดีกรี 0 ส่วนเอกนามศูนย์ไม่กำหนดดีกรี นิพจน์ $\frac{1}{x} = x^{-1}$ และ $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ไม่เป็นเอกนามในตัวแปร x เพราะเลขชี้กำลังไม่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

ตัวอย่าง 1.1 จงหาสัมประสิทธิ์และดีกรีของ $-\frac{3}{4}a^2b^5$

วิธีคิด สัมประสิทธิ์รวมเครื่องหมายลบด้วย จึงเท่ากับ $-\frac{3}{4}$ ส่วนดีกรีเท่ากับ $2 + 5 = 7$

ตอบ สัมประสิทธิ์ $-\frac{3}{4}$ และดีกรี 7

ตัวอย่าง 1.2 นิพจน์ $\sqrt{5}x^2$ เป็นเอกนามใน x หรือไม่

วิธีคิด $\sqrt{5}$ เป็นค่าคงตัว และตัวแปร x มีเลขชี้กำลัง 2 ซึ่งเป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

ตอบ เป็นเอกนาม มีสัมประสิทธิ์ $\sqrt{5}$ และดีกรี 2

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

1.2 พจน์คล้ายและพหุนาม

พจน์คล้ายคือเอกนามที่มีส่วนตัวแปรและเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเหมือนกัน เช่น $3x^2y$ กับ $-5x^2y$ เป็นพจน์คล้าย แต่ $3x^2y$ กับ $3xy^2$ ไม่เป็นพจน์คล้าย

$$3x^2y - 5x^2y = (3 - 5)x^2y = -2x^2y$$

พหุนาม คือผลบวกของเอกนามจำนวนจำกัด โดยถือการลบเป็นการบวกด้วยจำนวนตรงข้าม รูปร่างง่ายของพหุนามได้จากการรวมพจน์คล้ายทั้งหมดแล้ว

ดีกรีของพหุนาม

ดีกรีของพหุนามที่ไม่เป็นศูนย์ คือดีกรีสูงสุดของพจน์ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์ **หลังรวมพจน์คล้าย** พหุนามศูนย์ไม่กำหนดดีกรี

สำหรับพหุนามตัวแปรเดียว นิยมเรียงพจน์ตามเลขชี้กำลังจากมากไปน้อย พจน์ที่มีดีกรีสูงสุดเรียกว่า **พจน์นำ** และสัมประสิทธิ์ของพจน์นั้นเรียกว่า **สัมประสิทธิ์นำ**

ตัวอย่าง 1.3 จงจัดรูป $4x^3 + 2x^2 - 7 - 4x^3 + 5x$ และหาดีกรี

วิธีคิด พจน์ $4x^3$ กับ $-4x^3$ รวมกันเป็นศูนย์ จึงเหลือ $2x^2 + 5x - 7$ พจน์นำคือ $2x^2$

ตอบ $2x^2 + 5x - 7$ มีดีกรี 2

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

1.3 พหุนามตัวแปรเดียว

พหุนามตัวแปรเดียวเขียนด้วยตัวแปรเพียงตัวเดียว เช่น x โดยเลขชี้กำลังในทุกพจน์เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ และนิยมเรียงพจน์ตามเลขชี้กำลังจากมากไปน้อย

รูปทั่วไปของพหุนามตัวแปรเดียว

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ สัมประสิทธิ์ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$

พหุนามนี้มีดีกรี n พจน์นำคือ $a_n x^n$ สัมประสิทธิ์นำคือ a_n และพจน์คงตัวคือ a_0 สัมประสิทธิ์ของพจน์อื่นอาจเป็นศูนย์ได้ จึงไม่จำเป็นต้องมีพจน์ครบทุกกำลังของ x

เมื่อ $n = 0$ รูปทั่วไปเหลือเพียง $P(x) = a_0$ โดย $a_0 \neq 0$ ซึ่งเป็นพหุนามคงตัวดีกรี 0 ส่วน $P(x) = 0$ เป็นพหุนามศูนย์และไม่กำหนดดีกรี

การระบุสัมประสิทธิ์จากรูปทั่วไป

พิจารณา $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ โดยเขียนพจน์ที่ขาดด้วยสัมประสิทธิ์ศูนย์

$$P(x) = 3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 5$$

จึงมี $n = 4$ และ

$$a_4 = 3, \quad a_3 = 0, \quad a_2 = -2, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 5$$

1.4 ค่าของพหุนาม

สัญลักษณ์ $P(x)$ ใช้แทนพหุนามในตัวแปร x และ $P(c)$ หมายถึงค่าที่ได้เมื่อแทน x ด้วย c ทุกตำแหน่ง เมื่อตัวแปรมีค่าลบควรใส่วงเล็บก่อนยกกำลัง

ตัวอย่าง 1.4 กำหนด $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ จงหา $P(-2)$

วิธีคิด

$$P(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 4 = 8 + 6 + 4 = 18$$

ตอบ 18

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

1.5 การบวกและการลบพหุนาม

การบวกพหุนามใช้สมบัติการสลับที่และการเปลี่ยนหมู่ เพื่อจัดพจน์คล้ายไว้ร่วมกันแล้วบวกสัมประสิทธิ์ การลบพหุนามทำได้โดยบวกด้วยพหุนามตรงข้าม จึงต้องเปลี่ยนเครื่องหมายของทุกพจน์ในวงเล็บที่ถูกลบ

การจัดการเครื่องหมาย

$$A - (B + C - D) = A - B - C + D$$

สำหรับพจน์คล้าย $ax^m + bx^m = (a + b)x^m$

ตัวอย่าง 1.5 จงหาผลต่าง $(3x^2 - 2x + 5) - (x^2 + 4x - 1)$

วิธีคิด

$$3x^2 - 2x + 5 - x^2 - 4x + 1 = 2x^2 - 6x + 6$$

ตอบ $2x^2 - 6x + 6$

1.6 การคูณเอกนามและการแจกแจง

คูณสัมประสิทธิ์ตาม กฎของ จำนวนจริง และใช้สมบัติ เลขยกกำลัง กับ ตัวแปรที่มีฐานเดียวกัน จากนั้น แจกแจงการคูณไปยังทุกพจน์ในวงเล็บ

สมบัติที่ใช้ในการคูณ

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad a(B + C) = aB + aC$$

เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

ตัวอย่าง 1.6 จงหาผลคูณ $-2xy(3x^2 - 4xy + 5)$

วิธีคิด คูณ $-2xy$ เข้ากับแต่ละพจน์ ได้

$$(-2xy)(3x^2) + (-2xy)(-4xy) + (-2xy)(5) = -6x^3y + 8x^2y^2 - 10xy$$

ตอบ $-6x^3y + 8x^2y^2 - 10xy$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

1.7 การคูณพหุนาม

การคูณพหุนามสองพหุนามต้องคูณทุกพจน์ของพหุนามแรกกับทุกพจน์ของพหุนามที่สอง แล้วรวมพจน์คล้าย

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a + b)x + ab$$

แผนภาพพื้นที่ต่อไปนี้แสดงผลคูณ $(x + 2)(x + 4)$ เมื่อ $x > 0$ โดยแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็นสี่ส่วน

4	$4x$	8
x	x^2	$2x$
	x	2

จึงได้ $(x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 8$ เอกลักษณ์นี้เป็นจริงสำหรับจำนวนจริง x ทุกค่า แม้แผนภาพพื้นที่ใช้เฉพาะความยาวที่เป็นบวก

ตัวอย่าง 1.7 จงหาผลคูณ $(2x - 3)(x + 4)$

วิธีคิด

$$(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12$$

ตอบ $2x^2 + 5x - 12$

ตัวอย่าง 1.8 จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^2 ใน $(x^2 + 3x - 2)(2x + 5)$

วิธีคิด ผลคูณที่ให้พจน์ x^2 คือ $x^2(5)$ และ $(3x)(2x)$ จึงได้ $(5 + 6)x^2 = 11x^2$

ตอบ 11

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-3

เอกนามและการดำเนินการของพหุนาม

ข้อ 1 จงพิจารณาว่า $-5x^2y$, $\frac{3}{x}$ และ $\sqrt{7}x$ นิพจน์ใดเป็นเอกนาม พร้อมให้เหตุผล

ตอบ _____

ข้อ 2 จงหาสัมประสิทธิ์ ดีกรีรวม และดีกรีในตัวแปร x ของ $-\frac{2}{5}x^3y^4$

ตอบ _____

ข้อ 3 จงหาดีกรีของ -9 และ $4x^2 - 4x^2$

ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4

การแยกตัวประกอบโดยใช้รูปแบบของนิพจน์

4.1 การใช้เอกลักษณ์กับนิพจน์

ในสูตร $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ สัญลักษณ์ A, B อาจแทนพหุนามทั้งนิพจน์ได้ การระบุว่าพจน์ใดเป็นกำลังสองหรือกำลังสามช่วยกำหนดรูปของตัวประกอบ

สูตรที่ใช้ในการแยกตัวประกอบ

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

สำหรับ สูตร กำลังสาม เครื่องหมายในวงเล็บแรกตรงกับโจทย์ ส่วนพจน์กลางของวงเล็บที่สองใช้เครื่องหมายตรงข้าม

ตัวอย่าง 4.1 จงแยกตัวประกอบ $(x + 3)^2 - 16$

วิธีคิด ให้ $A = x + 3$ และ $B = 4$ ได้

$$[(x + 3) - 4][(x + 3) + 4] = (x - 1)(x + 7)$$

ตอบ $(x - 1)(x + 7)$

ตัวอย่าง 4.2 จงแยกตัวประกอบ $x^6 - 64$ เหนือจำนวนเต็ม

วิธีคิด ใช้ผลต่างกำลังสองก่อน แล้วแยกผลต่างและผลบวกกำลังสาม

$$\begin{aligned} x^6 - 64 &= (x^3 - 8)(x^3 + 8) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

ตอบ $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$

คำว่า **แยกตัวประกอบเหนือจำนวนเต็ม** ในเล่มนี้หมายถึงให้ตัวประกอบมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และแยกต่อจนไม่มีตัวประกอบพหุนามดีกรีบวกที่แยกได้อีกในขอบเขตนี้

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

การแยกตัวประกอบโดยใช้รูปแบบของนิพจน์

4.2 การแทนนิพจน์ร่วม

เมื่อนิพจน์หนึ่งปรากฏซ้ำหลายตำแหน่ง สามารถกำหนดตัวแปรชั่วคราวแทนนิพจน์นั้น แล้วใช้วิธีแยกตัวประกอบที่ทราบ เมื่อแยกได้แล้วต้องแทนกลับเป็นตัวแปรเดิม

ตัวอย่าง 4.3 จงแยกตัวประกอบ $(x + 2)^2 - 3(x + 2) - 10$

วิธีคิด ให้ $t = x + 2$ ได้

$$t^2 - 3t - 10 = (t - 5)(t + 2)$$

แทนกลับเป็น $[(x + 2) - 5][(x + 2) + 2]$

ตอบ $(x - 3)(x + 4)$

ตัวอย่าง 4.4 จงแยกตัวประกอบ $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 8$

วิธีคิด ให้ $t = x^2 + x$ จะได้ $(t - 4)(t + 2)$ แล้วแทนกลับ

ตอบ $(x^2 + x - 4)(x^2 + x + 2)$

4.3 การปรับพจน์คงตัว

หากผลคูณสองวงเล็บมีส่วนร่วม อาจกระจายในตัวแปรชั่วคราวแล้วรวมค่าคงตัวที่เพิ่มเข้ามาก่อน

ตัวอย่าง 4.5 จงแยกตัวประกอบ $(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 4) + 4$

วิธีคิด ให้ $t = x^2 + 2x$ จึงได้

$$(t - 1)(t + 4) + 4 = t^2 + 3t = t(t + 3)$$

แทนกลับและดึงตัวประกอบร่วมจาก $x^2 + 2x$

ตอบ $x(x + 2)(x^2 + 2x + 3)$

การแทนตัวแปรเป็นเพียงการเปลี่ยนชื่อของนิพจน์ จึงต้องรักษากำลัง เครื่องหมาย และค่าคงตัวให้ตรงกับนิพจน์เดิมทุกตำแหน่ง

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

การแยกตัวประกอบโดยใช้รูปแบบของนิพจน์

4.4 การจับคู่ตัวประกอบ

ผลคูณของวงเล็บเชิงเส้นหลายวงเล็บอาจจัดคู่ให้เกิดนิพจน์ร่วม โดยเปรียบเทียบผลบวกของค่าคงตัวในแต่ละคู่ แล้วจึงตรวจพจน์กลางหลังคูณวงเล็บ

ตัวอย่าง 4.6 จงแยกตัวประกอบ $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$

วิธีคิด จับคู่เป็น

$$(x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4, \quad (x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

ให้ $t = x^2 + 5x + 5$ จึงได้

$$(t - 1)(t + 1) + 1 = t^2$$

ตอบ $(x^2 + 5x + 5)^2$

4.5 การปรับสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังสอง

เมื่อวงเล็บหลายวงมีนิพจน์ร่วม ให้แทนนิพจน์นั้นด้วยตัวแปรชั่วคราว แล้วกระจายและรวมพจน์ตามกำลังของตัวแปรใหม่ ก่อนเลือกวิธีแยกตัวประกอบ

ตัวอย่าง 4.7 จงแยกตัวประกอบ $(x^2 + x + 1)(x^2 + 5x + 1) + 4x^2$

วิธีคิด ให้ $t = x^2 + 1$ ได้

$$(t + x)(t + 5x) + 4x^2 = t^2 + 6xt + 9x^2 = (t + 3x)^2$$

แทน $t = x^2 + 1$ กลับ

ตอบ $(x^2 + 3x + 1)^2$

หลักของการเลือกนิพจน์ร่วม

เลือกส่วนที่เหมือนกันทั้งรูปและเครื่องหมาย แล้วเขียนทุกพจน์ด้วยตัวแปรชั่วคราวเดียวกัน เมื่อแยกตัวประกอบเสร็จ ให้แทนกลับและตรวจการกระจาย

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 4 | ข้อ 37-39

การแยกตัวประกอบโดยใช้รูปแบบของนิพจน์

ข้อ 37 จงแยกตัวประกอบ $(2x + 1)^2 - 25$

ตอบ _____

ข้อ 38 จงแยกตัวประกอบ $x^4 - 81$ ให้น้อยจำนวนเต็ม

ตอบ _____

ข้อ 39 จงแยกตัวประกอบ $8a^3 + 27b^3$

ตอบ _____