



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง พาราโบลา

www.mathstandard.com

เรื่อง พาราโบลา

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.3

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา มุ่งพัฒนาความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างสมการกำลังสองกับกราฟในระนาบพิกัด โดยเน้นการแปลความหมายของสัญลักษณ์ การให้เหตุผลจากสมบัติทางพีชคณิต และการใช้กราฟประกอบการวิเคราะห์ปัญหา

เนื้อหาเริ่มจากคู่อันดับและการเขียนกราฟ ศึกษาจุดยอด แกนสมมาตร การเลื่อนกราฟ จุดตัดแกน และเครื่องหมายของฟังก์ชัน จากนั้นเชื่อมโยงสู่การสร้างสมการ จุดร่วมกับเส้นตรง ความยาวและพื้นที่ ก่อนพิจารณาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และนิพจน์ที่ลดรูปได้ด้วยการแทนตัวแปร

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง โดยเชื่อมโยงสมการกำลังสอง จำนวนจริง และเรขาคณิต ผู้เรียนควรมีพื้นฐานการคำนวณจำนวนจริง การแยกตัวประกอบ การแก้สมการกำลังสอง และทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- ตัวแปรและสัมประสิทธิ์พิจารณาในระบบจำนวนจริง เว้นแต่โจทย์ระบุเงื่อนไขเพิ่มเติม
- พาราโบลาในเอกสารนี้เป็นกราฟของ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ ซึ่งมีแกนสมมาตรขนานกับแกน y
- คู่อันดับ (x, y) ระบุพิกัดแนวนอนก่อนแนวตั้ง ส่วน $f(x)$ หมายถึงค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x
- จุดตัดหรือจุดรวมที่ถามเป็นพิกัด ต้องระบุทั้งสองพิกัด ส่วนความยาว พื้นที่ และปริมาณในสถานการณ์ ต้องระบุหน่วยให้สอดคล้องกัน
- อ่านค่าพิกัดจากตัวเลขบนแกน ภาพบางรูปใช้มาตราส่วนแนวนอนและแนวตั้งต่างกัน จึงไม่ใช้การวัดจากภาพแทนข้อมูลที่กำหนด
- การหาค่าสุดขีดต้องพิจารณาช่วงของตัวแปรและเงื่อนไขทางเรขาคณิตทุกครั้ง

เรียบเรียงโดย MathStandard สำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง พาราโบลา

สารบัญ

ตอนที่ 1 พื้นฐานพิกัดและกราฟกำลังสอง

เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–6	8

ตอนที่ 2 จุดยอด แกนสมมาตร และการเลื่อนกราฟ

เนื้อหาและตัวอย่าง	11
แบบฝึกหัดข้อ 7–16	20

ตอนที่ 3 จุดตัดแกนและเครื่องหมายของฟังก์ชัน

เนื้อหาและตัวอย่าง	24
แบบฝึกหัดข้อ 17–26	29

ตอนที่ 4 การสร้างสมการและจุดร่วมกับเส้นตรง

เนื้อหาและตัวอย่าง	33
แบบฝึกหัดข้อ 27–35	40

ตอนที่ 5 พิกัด ความยาว และพื้นที่

เนื้อหาและตัวอย่าง	44
แบบฝึกหัดข้อ 36–45	50

ตอนที่ 6 ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และการประยุกต์

เนื้อหาและตัวอย่าง	55
แบบฝึกหัดข้อ 46–52	63

เรื่อง พาราโบลา

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 การลดรูปและเงื่อนไขของตัวแปร

เนื้อหาและตัวอย่าง	67
แบบฝึกหัดข้อ 53–56	73
เฉลยคำตอบ	75
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	79

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

พื้นฐานพิกัดและกราฟกำลังสอง

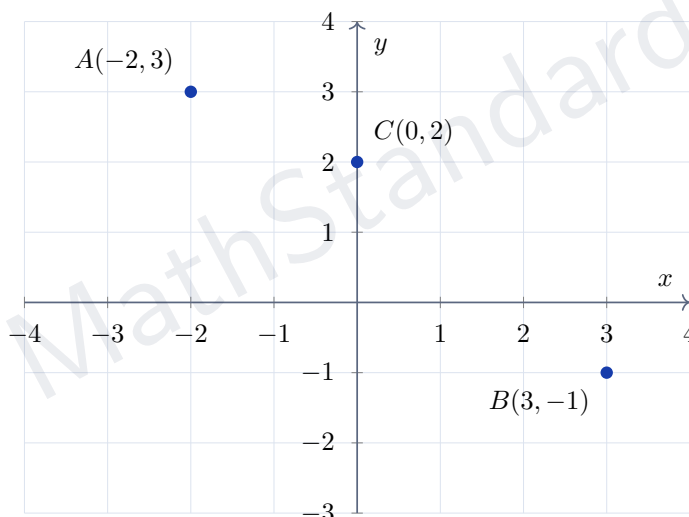
1.1 ระนาบพิกัดและคู่อันดับ

ระนาบพิกัดประกอบด้วยแกน x ในแนวนอนและแกน y ในแนวตั้ง ซึ่งตั้งฉากกันที่จุดกำเนิด $O = (0, 0)$ จุดแต่ละจุดระบุด้วยคู่อันดับ (x, y) โดยพิกัดตัวแรกบอกตำแหน่งตามแนวนอน และตัวที่สองบอกตำแหน่งตามแนวตั้ง

การอ่านพิกัด

จากจุดกำเนิด ค่า $x > 0$ อยู่ทางขวา และ $x < 0$ อยู่ทางซ้าย ส่วนค่า $y > 0$ อยู่ด้านบน และ $y < 0$ อยู่ด้านล่าง

จุดบนแกน x มี $y = 0$ และจุดบนแกน y มี $x = 0$



แกนทั้งสองแบ่งระนาบออกเป็นสี่ตุภาค เรียงทวนเข็มนาฬิกาจากส่วนขวาบน โดยมีเครื่องหมายพิกัดเป็น $(+, +)$, $(-, +)$, $(-, -)$ และ $(+, -)$ ตามลำดับ จุดบนแกนไม่อยู่ในตุภาคใด

ตัวอย่าง 1 จุด $P = (3, -2)$ อยู่ในตุภาคใด และแตกต่างจาก $Q = (-2, 3)$ อย่างไร

วิธีคิด จุด P มีพิกัดแนวนอนเป็นบวกและแนวตั้งเป็นลบ จึงอยู่ในตุภาคที่ 4 ส่วน Q มีแนวนอนเป็นลบและแนวตั้งเป็นบวก จึงอยู่ในตุภาคที่ 2 การสลับลำดับพิกัดทำให้ตำแหน่งเปลี่ยน

ตอบ P อยู่ในตุภาคที่ 4 และเป็นคนละจุดกับ Q

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

พื้นฐานพิกัดและกราฟกำลังสอง

1.2 กราฟของสมการและฟังก์ชันกำลังสอง

กราฟของสมการคือเซตของจุดที่พิกัดสอดคล้องกับสมการนั้น เช่น จุด $(2, 3)$ อยู่บนกราฟ $y = x^2 - 1$ เพราะเมื่อแทน $x = 2$ จะได้ $y = 3$ การตรวจว่าจุดอยู่บนกราฟจึงใช้การแทนค่าพิกัดทั้งสองแล้วตรวจความเท่ากัน

รูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง

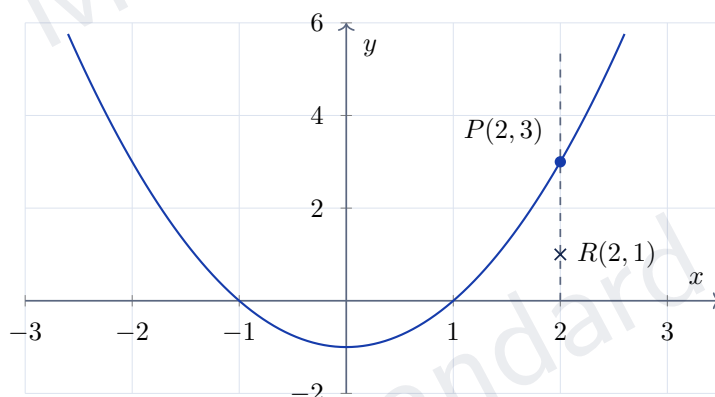
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

a, b, c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง กราฟมีลักษณะเป็นพาราโบลา และสำหรับค่า x แต่ละค่า จะมีค่า y เพียงค่าเดียว

สัญลักษณ์ $f(t)$ หมายถึงค่าที่ได้เมื่อแทน $x = t$ ในสูตรของ $f(x)$

เงื่อนไข $a \neq 0$ ทำให้พจน์กำลังสองคงอยู่ หาก $a = 0$ สมการจะลดเป็น $y = bx + c$ ซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันกำลังสอง นอกจากนี้ x^2 หมายถึง $x \cdot x$ จึงต้องใส่วงเล็บเมื่อแทนจำนวนลบ เช่น $(-3)^2 = 9$

พิกัดที่สอดคล้องกับสมการ



บนกราฟ $y = x^2 - 1$ เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = 3$ จึงมี P อยู่บนกราฟ ส่วน R ไม่อยู่บนกราฟ แม้มีพิกัดแนวนอนเท่ากัน

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

พื้นฐานพิกัดและกราฟกำลังสอง

1.2 กราฟของสมการและฟังก์ชันกำลังสอง (ต่อ)

ตัวอย่าง 2 กำหนด $f(x) = 2x^2 - x + 1$ จงหา $f(-2)$ และพิจารณาว่า $P = (-2, 11)$ อยู่บนกราฟหรือไม่

วิธีคิด แทน $x = -2$ ได้

$$f(-2) = 2(-2)^2 - (-2) + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$$

พิกัดแนวตั้งของ P เท่ากับค่าที่คำนวณได้

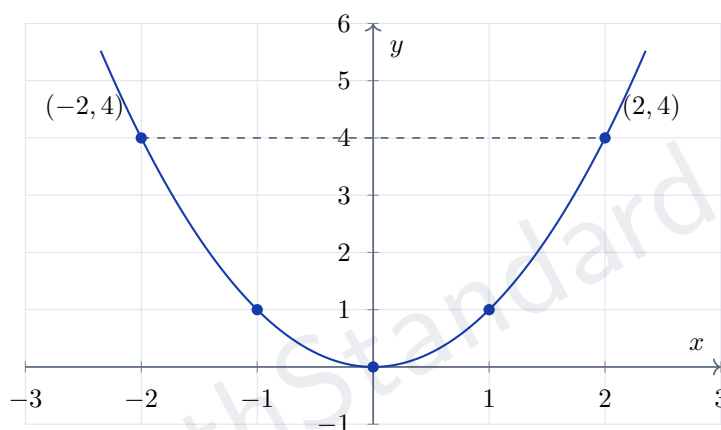
ตอบ $f(-2) = 11$ และ P อยู่บนกราฟ

1.3 การสร้างตารางค่า

เลือกค่า x หลายค่า คำนวณค่า y แล้วลงจุด (x, y) ในระนาบพิกัด จากนั้นลากเส้นโค้งผ่านจุดตามลักษณะของพาราโบลา การเชื่อมจุดด้วยส่วนของเส้นตรงที่ละช่วงไม่ใช่รูปกราฟที่แท้จริง

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

จากตารางค่าไปสู่เส้นโค้ง



จุดทั้งห้าจากตารางอยู่บน $y = x^2$ เส้นโค้งเชื่อมต่ออย่างต่อเนื่อง และจุดที่มี x ตรงข้ามกันอยู่ในระดับเดียวกัน

ค่าของ x ที่เป็นจำนวนตรงข้ามกันให้ค่า y เท่ากัน เช่น $(-2, 4)$ และ $(2, 4)$ จึงเห็นสมมาตรเกี่ยวกับแกน y

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

พื้นฐานพิกัดและกราฟกำลังสอง

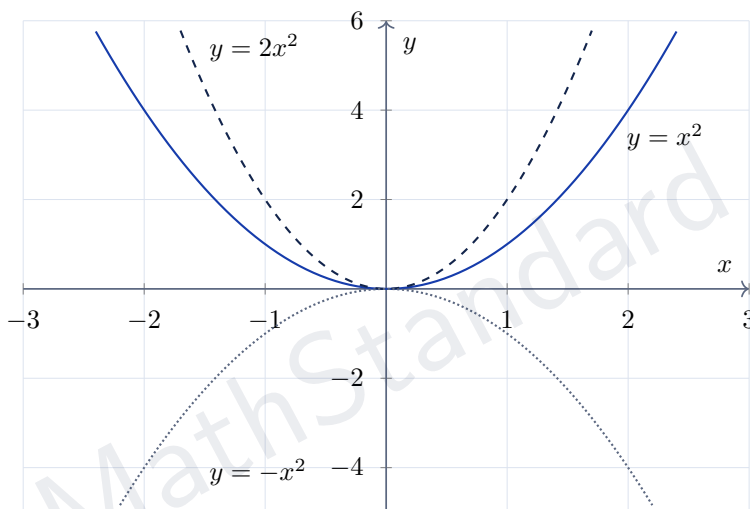
1.4 กราฟพื้นฐาน $y = ax^2$

จุดยอด ทิศเปิด และความกว้าง

กราฟ $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$ มีจุดยอด $(0, 0)$ และแกนสมมาตร $x = 0$

$a > 0$ ให้กราฟหงาย และ $a < 0$ ให้กราฟคว่ำ

เมื่อใช้มาตราส่วนเดียวกัน $|a|$ มากทำให้กราฟแคบกว่า และ $|a|$ น้อยทำให้กราฟกว้างกว่า



สำหรับ $y = ax^2$ จุดที่มี $x = 1$ มีค่า $y = a$ จึงใช้ระยะจากจุดกำเนิดถึงระดับดังกล่าวเปรียบเทียบการเพิ่มหรือลดของกราฟได้ โดยต้องพิจารณาเครื่องหมายของ a แยกจากขนาด $|a|$

ตัวอย่าง 3 จงเปรียบเทียบ $y = \frac{1}{2}x^2$ กับ $y = -3x^2$

วิธีคิด สมการแรกมี $a > 0$ จึงหงาย สมการที่สองมี $a < 0$ จึงคว่ำ และ $3 > \frac{1}{2}$ ทำให้กราฟที่สองแคบกว่าเมื่อใช้มาตราส่วนเดียวกัน

ตอบ กราฟแรกหงายและกว้างกว่า กราฟที่สองคว่ำและแคบกว่า

การอ่านรูปใช้ค่าที่กำกับบนแกนเป็นหลัก ภาพประกอบบางรูปใช้มาตราส่วนแนวนอนและแนวตั้งต่างกัน จึงไม่ใช้การวัดระยะจากภาพแทนการคำนวณจากพิกัด

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-2

พื้นฐานพิกัดและกราฟกำลังสอง

ข้อ 1 กำหนดจุด $A = (-3, 2)$ และ $B = (2, -3)$ จงระบุจุดภาคของแต่ละจุด และอธิบายว่าจุดทั้งสองเป็นจุดเดียวกันหรือไม่

ตอบ _____

ข้อ 2 จุด $P = (-2, 3)$ และ $Q = (1, 0)$ จุดใดอยู่บนกราฟ $y = x^2 - 1$

ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2

จุดยอด แกนสมมาตร และการเลื่อนกราฟ

2.1 รูปจุดยอด

เมื่อเลื่อนกราฟพื้นฐาน $y = ax^2$ จะได้รูปที่แสดงจุดยอดโดยตรง จุดยอดเป็นตำแหน่งที่ค่า y ต่ำที่สุดสำหรับกราฟหงาย หรือสูงที่สุดสำหรับกราฟคว่ำ เมื่อพิจารณา x เป็นจำนวนจริงทั้งหมด

รูปจุดยอดของพาราโบลา

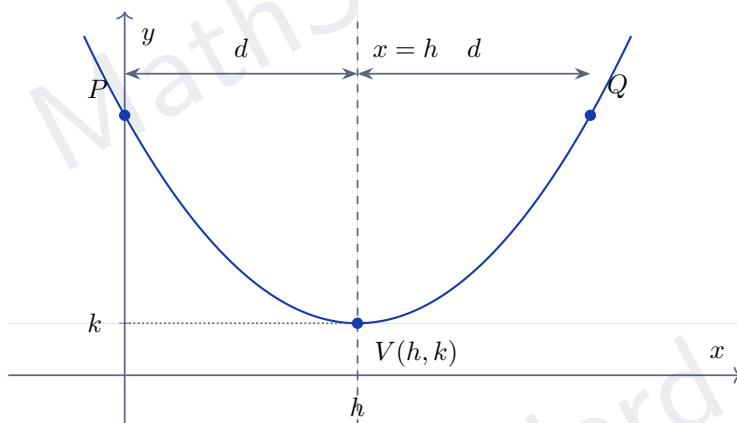
$$y = a(x - h)^2 + k, \quad a \neq 0$$

จุดยอดคือ (h, k) และแกนสมมาตรคือ $x = h$

ค่า a กำหนดทิศเปิดและความกว้าง ส่วน h, k กำหนดตำแหน่งจุดยอด

พจน์ $(x - h)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเป็นศูนย์เมื่อ $x = h$ จึงทำให้ $y = k$ สำหรับเครื่องหมายในวงเล็บ ต้องเขียนเทียบกับ $x - h$ เช่น $x + 2 = x - (-2)$ จึงมี $h = -2$

ส่วนประกอบของพาราโบลาในรูปจุดยอด



V คือจุดยอด เส้นประ $x = h$ คือแกนสมมาตร และ P, Q เป็นจุดคู่สมมาตร ภาพนี้แสดงกรณี $a > 0$ จึงเปิดขึ้นและมีระดับต่ำสุด $y = k$

ตัวอย่าง 4 จงระบุจุดยอด แกนสมมาตร และทิศเปิดของ $y = -2(x + 2)^2 + 5$

วิธีคิด ได้ $a = -2, h = -2, k = 5$ เนื่องจาก $a < 0$ กราฟจึงคว่ำ และมีค่าสูงสุดเท่ากับ 5

ตอบ จุดยอด $(-2, 5)$ แกนสมมาตร $x = -2$ และกราฟคว่ำ

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

จุดยอด แกนสมมาตร และการเลื่อนกราฟ

2.2 การทำกำลังสองสมบูรณ์

รูปทั่วไป $y = ax^2 + bx + c$ สามารถจัดเป็นรูปจุดยอดได้โดยใช้การเติมและลบจำนวนเดียวกัน เพื่อให้ค่าของนิพจน์คงเดิม หาก $a \neq 1$ ให้ดึง a ออกจากพจน์ที่มี x ก่อน

สูตรกำลังสองสมบูรณ์ที่ใช้

$$(x + r)^2 = x^2 + 2rx + r^2$$

$$(x - r)^2 = x^2 - 2rx + r^2$$

การเติมพจน์เพื่อสร้างกำลังสองต้องชดเชยด้วยการลบพจน์เดียวกันเสมอ

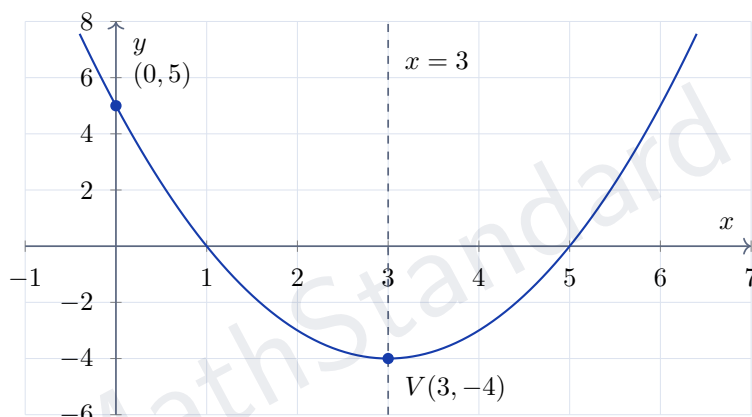
ตัวอย่าง 5 จงเขียน $y = x^2 - 6x + 5$ ในรูปจุดยอด

วิธีคิด ครึ่งหนึ่งของสัมประสิทธิ์ x คือ -3 และกำลังสองของจำนวนนี้คือ 9 จึงเติม 9 และลบ 9

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 \\ &= (x - 3)^2 - 4 \end{aligned}$$

จุดยอดจึงอยู่ที่ $(3, -4)$

สมการสองรูปแสดงกราฟเดียวกัน



$x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$ สำหรับทุกค่า x การจัดรูปไม่เปลี่ยนกราฟ แต่ทำให้เห็นจุดยอด $(3, -4)$ และแกนสมมาตร $x = 3$ โดยตรง

ตอบ $y = (x - 3)^2 - 4$ จุดยอด $(3, -4)$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

จุดยอด แกนสมมาตร และการเลื่อนกราฟ

2.2 การทำกำลังสองสมบูรณ์ (ต่อ)

ตัวอย่าง 6 จงหาจุดยอดของ $y = 2x^2 + 8x + 3$ ด้วยการจัดรูป

วิธีคิด ดึง 2 ออกจากสองพจน์แรก แล้วเติมและลบ 4 ภายในวงเล็บ

$$\begin{aligned}y &= 2(x^2 + 4x) + 3 \\&= 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 3 \\&= 2((x + 2)^2 - 4) + 3 \\&= 2(x + 2)^2 - 5\end{aligned}$$

การลบ 4 ภายในวงเล็บมีผลเป็นการลบ 8 หลังคูณด้วย 2

ตอบ จุดยอด $(-2, -5)$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

จุดยอด แกนสมมาตร และการเลื่อนกราฟ

2.3 จุดยอดจากสัมประสิทธิ์

สำหรับ $a \neq 0$ การทำกำลังสองสมบูรณ์ในรูปทั่วไปให้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

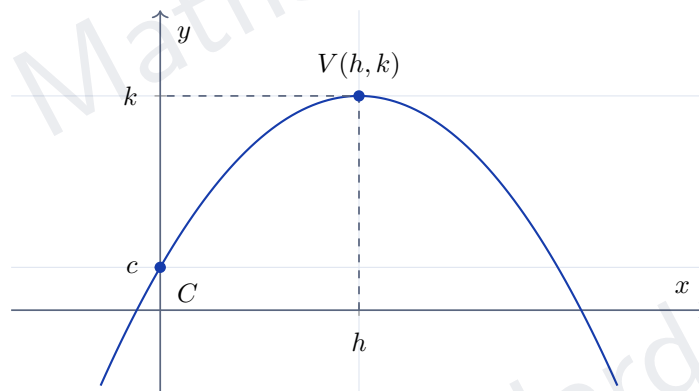
พิกัดจุดยอดและแกนสมมาตร

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a}$$

จุดยอด (h, k) , แกนสมมาตร $x = h$

หาค่า h ก่อน แล้วแทนลงในสมการเดิมเพื่อคำนวณ k ได้เช่นกัน

อ่านพิกัดจุดยอดจากสัมประสิทธิ์



เส้นประแสดงพิกัดจุดยอด $V(h, k)$ โดย $h = -b/(2a)$ และ $k = f(h)$ ส่วน $C = (0, c)$ เป็นจุดตัดแกน y ภาพแสดงกรณี $a < 0$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

จุดยอด แกนสมมาตร และการเลื่อนกราฟ

2.3 จุดยอดจากสัมประสิทธิ์ (ต่อ)

ตัวอย่าง 7 จงหาจุดยอดของ $y = -2x^2 + 4x + 3$

วิธีคิด จาก $a = -2, b = 4$ ได้

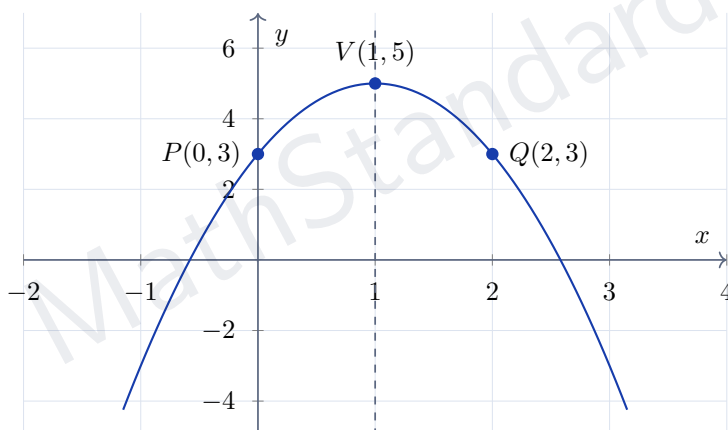
$$h = -\frac{4}{2(-2)} = 1$$

แทน $x = 1$ ลงในสมการเดิม

$$k = -2(1)^2 + 4(1) + 3 = 5$$

จึงเขียนในรูปจุดยอดได้เป็น $y = -2(x - 1)^2 + 5$

กราฟประกอบการหาจุดยอดจากสมการ



กราฟ $y = -2x^2 + 4x + 3$ มีแกนสมมาตร $x = 1$ จุด P, Q ห่างจากแกนเท่ากันและมีค่า y เท่ากัน ส่วนจุดยอด V อยู่สูงกว่าทุกจุดอื่น

ตอบ จุดยอด $(1, 5)$

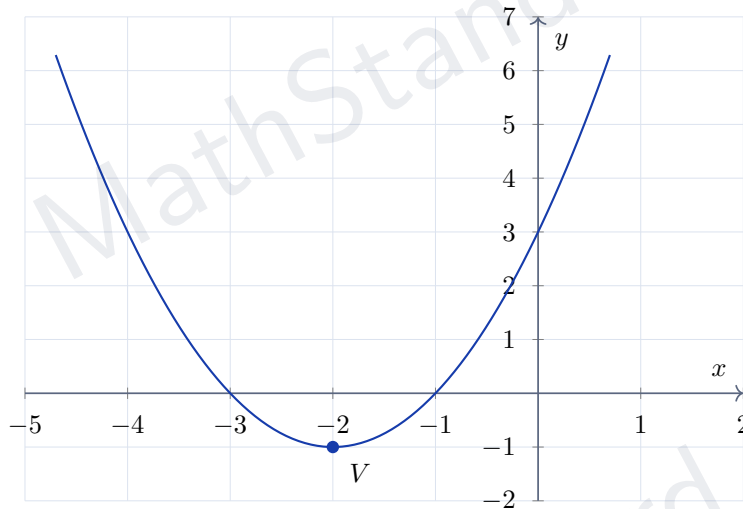
การตรวจความสอดคล้อง

สมการในรูปทั่วไปและรูปจุดยอดต้องให้ค่า y เท่ากันเมื่อแทน x เดียวกัน นอกจากนี้จุดยอดที่คำนวณได้ ต้องสอดคล้องกับทิศเปิดของกราฟ

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 2 | ข้อ 7-8

จุดยอด แกนสมมาตร และการเลื่อนกราฟ

ข้อ 7 จากกราฟ จงหาพิกัดจุดยอด V และสมการแกนสมมาตร



ตอบ _____

ข้อ 8 กราฟ $y = -3(x - 4)^2 + 2$ มีแกนสมมาตรเป็นเส้นตรงใด

ตอบ _____