



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง สมบัติของจำนวนเต็ม

เรื่อง สมบัติของจำนวนเต็ม

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 2.3

เอกสาร ประกอบการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ เรื่อง สมบัติของจำนวนเต็ม มุ่ง พัฒนา ความ เข้าใจ เกี่ยว กับ จำนวนเต็มและความสัมพันธ์เชิงจำนวน อันเป็นพื้นฐานของการศึกษาพีชคณิตและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น โดยมุ่งให้ผู้เรียนอธิบายความหมายของสัญลักษณ์ ใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์อย่างมีเหตุผล และตรวจสอบ ความสมเหตุสมผลของผลลัพธ์ได้

เนื้อหาเริ่มจากชนิดของจำนวนเต็ม เส้นจำนวน การเปรียบเทียบ สมบัติของการดำเนินการ และค่าสัมบูรณ์ แล้วพัฒนาไปสู่การคำนวณ การหารลงตัว เศษจากการหาร จำนวนเฉพาะ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. จากนั้น เชื่อมโยงกับลำดับ ผลบวก แผลกทอเรียล และฟังก์ชันพื้น เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาปัญหาที่มีโครงสร้าง ซับซ้อนขึ้น

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การ ประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง โดยเชื่อมโยงพีชคณิต การนับ และแบบรูปทาง คณิตศาสตร์ตามความจำเป็น ผู้เรียนควรมีพื้นฐานการคำนวณจำนวนและเศษส่วน

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- คำว่า **ตัวประกอบ** ของจำนวนเต็มบวกในการนับจำนวนตัวประกอบ หมายถึงตัวประกอบบวก เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น
- เมื่อหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็มบวก d ใช้รูป $N = dq + r$ โดย q เป็นจำนวนเต็มและ $0 \leq r < d$
- สัญลักษณ์ $\gcd(a, b)$ และ $\text{lcm}(a, b)$ แทน ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของจำนวนเต็มบวก a, b ตามลำดับ ส่วน $[x]$ แทนจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งไม่เกิน x
- คำตอบที่เป็นเศษส่วนเขียนในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ และปริมาณที่มีหน่วยต้องระบุหน่วยให้สอดคล้องกับ โจทย์

เรียบเรียงโดย MathStandard สำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง สมบัติของจำนวนเต็ม

สารบัญ

ตอนที่ 1 ชนิดของจำนวนเต็ม เส้นจำนวน และการเปรียบเทียบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–10	7

ตอนที่ 2 สมบัติของจำนวนเต็มและค่าสัมบูรณ์

เนื้อหาและตัวอย่าง	11
แบบฝึกหัดข้อ 11–18	14

ตอนที่ 3 การดำเนินการและลำดับการคำนวณ

เนื้อหาและตัวอย่าง	17
แบบฝึกหัดข้อ 19–31	22

ตอนที่ 4 การหารลงตัวและเศษจากการหาร

เนื้อหาและตัวอย่าง	27
แบบฝึกหัดข้อ 32–41	32

ตอนที่ 5 จำนวนเฉพาะและตัวประกอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	36
แบบฝึกหัดข้อ 42–51	40

ตอนที่ 6 ท.ร.ม. ค.ร.น. และปัญหาการหาร

เนื้อหาและตัวอย่าง	44
แบบฝึกหัดข้อ 52–61	47

เรื่อง สมบัติของจำนวนเต็ม

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 ลำดับและผลบวกเลขคณิต

เนื้อหาและตัวอย่าง	51
แบบฝึกหัดข้อ 62–68	54

ตอนที่ 8 ลำดับและผลบวกเรขาคณิต

เนื้อหาและตัวอย่าง	57
แบบฝึกหัดข้อ 69–73	59

ตอนที่ 9 แผลกทอเรียลและฟังก์ชันพี้น

เนื้อหาและตัวอย่าง	61
แบบฝึกหัดข้อ 74–78	64

ตอนที่ 10 การประยุกต์และการเชื่อมโยง

เนื้อหาและตัวอย่าง	66
แบบฝึกหัดข้อ 79–107	79
เฉลยคำตอบ	94
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	98

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

ชนิดของจำนวนเต็ม เส้นจำนวน และการเปรียบเทียบ

1.1 ชนิดของจำนวนเต็ม

จำนวนเต็มคือจำนวนที่ประกอบด้วยจำนวนเต็มบวก ศูนย์ และจำนวนเต็มลบ ใช้แทนปริมาณที่นับเป็นหน่วยเต็ม รวมทั้งปริมาณที่มีทิศทางหรือมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าจุดอ้างอิง

การจำแนกจำนวนเต็ม

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- จำนวนเต็มบวก ได้แก่ $1, 2, 3, \dots$ มีค่ามากกว่าศูนย์
- ศูนย์ คือ 0 ไม่เป็นจำนวนเต็มบวกและไม่เป็นจำนวนเต็มลบ
- จำนวนเต็มลบ ได้แก่ $-1, -2, -3, \dots$ มีค่าน้อยกว่าศูนย์

ในเอกสารนี้ จำนวนนับหมายถึง $1, 2, 3, \dots$ จึงตรงกับกลุ่มจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มไม่มีจำนวนที่มากที่สุดหรือจำนวนน้อยที่สุด เพราะสามารถเพิ่มหรือลดไปอีกหนึ่งหน่วยได้เสมอ

ตัวอย่าง 1.1 จงจำแนก $-6, 0, 4, -2, 9$ ตามชนิดของจำนวนเต็ม

วิธีคิด พิจารณาเครื่องหมายและค่าของแต่ละจำนวน จำนวนที่มากกว่าศูนย์คือ $4, 9$ จำนวนที่น้อยกว่าศูนย์คือ $-6, -2$ ส่วน 0 แยกเป็นอีกชนิดหนึ่ง

ตอบ จำนวนเต็มบวกคือ $4, 9$ จำนวนเต็มลบคือ $-6, -2$ และศูนย์คือ 0

ความหมายของจำนวนเต็มในสถานการณ์

เครื่องหมายของจำนวนขึ้นกับจุดอ้างอิงและข้อตกลง เช่น ความสูงเหนือระดับน้ำทะเลใช้จำนวนบวก ส่วนความลึกต่ำกว่าระดับน้ำทะเลใช้จำนวนลบ โดยระดับน้ำทะเลเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 1.2 จุดสำรวจอยู่ต่ำกว่าระดับน้ำทะเล 12 เมตร จงเขียนระดับของจุดนี้เมื่อกำหนดระดับน้ำทะเลเป็น 0

วิธีคิด จุดสำรวจอยู่ด้านต่ำกว่าจุดอ้างอิง จึงใช้เครื่องหมายลบกำกับระยะ 12 เมตร

ตอบ ระดับ -12 เมตร

พิจารณาค่าของจำนวน ไม่ใช่รูปที่เขียนเพียงอย่างเดียว เช่น $6/3 = 2$ และ $4.0 = 4$ เป็นจำนวนเต็ม แต่ $3/2 = 1.5$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ชนิดของจำนวนเต็ม เส้นจำนวน และการเปรียบเทียบ

1.2 เส้นจำนวน

เส้นจำนวนเป็นเส้นตรงที่กำหนดจุดแทนศูนย์และหน่วยระยะให้เท่ากันทุกช่วง จำนวนเต็มบวกอยู่ทางขวาของศูนย์ จำนวนเต็มลบอยู่ทางซ้ายของศูนย์ และแต่ละจุดแทนจำนวนได้เพียงค่าเดียว



ในภาพ จุด A แทน -3 และจุด B แทน 2 จุด A อยู่ห่างจากศูนย์สามหน่วยทางซ้าย ส่วนจุด B อยู่ห่างจากศูนย์สองหน่วยทางขวา

ทิศทางบนเส้นจำนวน

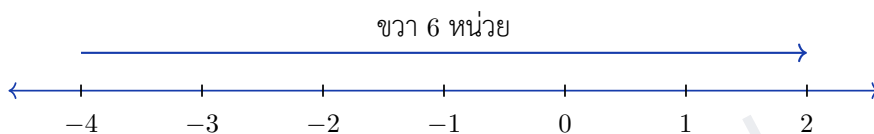
เลื่อนไปทางขวาหนึ่งหน่วย ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้น 1

เลื่อนไปทางซ้ายหนึ่งหน่วย ค่าของจำนวนลดลง 1

ตัวอย่าง 1.3 เริ่มที่ -4 แล้วเลื่อนไปทางขวา 6 หน่วย จะถึงจุดใด

วิธีคิด นับจุดที่ผ่านตามลำดับเป็น $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ รวมการเลื่อนหกครั้ง จึงถึงจุดที่แทน 2

ตอบ 2



ตัวอย่าง 1.4 จุด -2 กับจุด 3 อยู่ห่างกันกี่หน่วย

วิธีคิด จาก -2 ถึง 0 มีสองช่วงหน่วย และจาก 0 ถึง 3 มีสามช่วงหน่วย ระยะรวมเป็น $2 + 3 = 5$

ตอบ 5 หน่วย

ระยะทางนับจำนวนช่วงระหว่างจุด ไม่ใช่จำนวนจุดที่มองเห็น และมีค่าไม่ติดลบเสมอ

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ชนิดของจำนวนเต็ม เส้นจำนวน และการเปรียบเทียบ

1.3 การเปรียบเทียบจำนวนเต็ม

จำนวนที่อยู่ทางขวาบนเส้นจำนวนมีค่ามากกว่าจำนวนที่อยู่ทางซ้าย ใช้สัญลักษณ์ $>$ แทนมากกว่า $<$ แทนน้อยกว่า และ $=$ แทนเท่ากับ ส่วน $\leq$ และ $\geq$ รวมกรณีเท่ากันด้วย

ลำดับของจำนวนเต็ม

จำนวนเต็มลบ $<$ ศูนย์ $<$ จำนวนเต็มบวก

ในกลุ่มจำนวนเต็มลบ จำนวนที่อยู่ใกล้ศูนย์กว่ามีค่ามากกว่า เช่น

$$-9 < -4 < -1 < 0 < 3 < 7$$

การเปรียบเทียบ -9 กับ -4 ต้องพิจารณาทั้งเครื่องหมายและตำแหน่ง แม้ $9 > 4$ แต่เมื่อทั้งสองเป็นลบ จะมี $-9 < -4$ เพราะ -9 อยู่ทางซ้ายของ -4

ตัวอย่าง 1.5 จงเรียง $-2, 5, -7, 0, 3$ จากน้อยไปมาก

วิธีคิด เรียงจำนวนลบก่อน โดย $-7 < -2$ ตามด้วยศูนย์ แล้วเรียงจำนวนบวกโดย $3 < 5$

ตอบ $-7, -2, 0, 3, 5$

จำนวนเต็มในช่วงที่กำหนด

อสมการใช้ระบุขอบเขตของจำนวน เช่น $-2 < x \leq 3$ หมายถึง x มากกว่า -2 และไม่เกิน 3 จึงไม่รวมปลายซ้าย แต่รวมปลายขวา



ตัวอย่าง 1.6 จงหาจำนวนเต็มทั้งหมดที่ทำให้ $-2 < x \leq 3$

วิธีคิด เริ่มจากจำนวนเต็มที่ถัดจาก -2 คือ -1 และนับถึง 3 ได้ $-1, 0, 1, 2, 3$

ตอบ $-1, 0, 1, 2, 3$

การเรียงจากมากไปน้อยเป็นการอ่านลำดับกลับทิศ ส่วนคำว่า “ต่างกันก็หน่วย” เป็นคำถามเกี่ยวกับระยะ ไม่ใช่คำถามว่าจำนวนใดมากกว่า

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-3

ชนิดของจำนวนเต็ม เส้นจำนวน และการเปรียบเทียบ

ข้อ 1 จากจำนวน $-9, 0, 6, -4, 11$ มีจำนวนเต็มลบกี่จำนวน

ตอบ _____

ข้อ 2 จากจำนวน $-5, -1, 0, 3, 8, \frac{3}{2}, -\frac{7}{4}$ มีจำนวนเต็มกี่จำนวน

ตอบ _____

ข้อ 3 อุณหภูมิในตู้แช่ต่ำกว่าศูนย์องศาเซลเซียสอยู่ 6 องศา จงเขียนอุณหภูมินี้เป็นจำนวนเต็ม

ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4

การหารลงตัวและเศษจากการหาร

4.1 การหารลงตัวและการหารมีเศษ

เมื่อจำนวนเต็ม N หารด้วยจำนวนเต็มบวก d จะกำหนดผลหารที่เป็นจำนวนเต็ม q และเศษ r ได้เพียงคู่เดียว โดยกำหนดให้เศษไม่ติดลบและน้อยกว่าตัวหาร

ความสัมพันธ์ของการหาร

$$N = dq + r, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r < d$$

N คือตัวตั้ง d คือตัวหาร q คือผลหารจำนวนเต็ม และ r คือเศษ

ถ้า $r = 0$ เรียกว่า d หาร N ลงตัว เขียนเป็น $d \mid N$

ผลหารจำนวนเต็มบอกจำนวนกลุ่มที่ครบตามตัวหาร ส่วนเศษบอกจำนวนที่เหลือหลังจัดกลุ่ม ต้องตรวจทั้งสมการและเงื่อนไข $0 \leq r < d$ การเขียนสมการที่ถูกต้องเพียงอย่างเดียวยังไม่ยืนยันว่าจำนวนที่เหลือเป็นเศษตามนิยาม

ตัวอย่าง 4.1 จงหาผลหารจำนวนเต็มและเศษเมื่อหาร 29 ด้วย 6

วิธีคิด จาก $29 = 6(4) + 5$ และ $0 \leq 5 < 6$ จึงอ่านผลหารและเศษได้โดยตรง

ตอบ ผลหาร 4 และเศษ 5

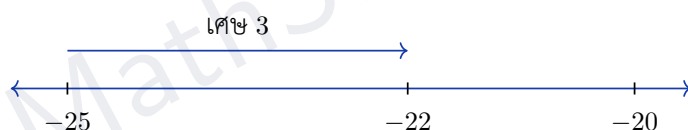
ตัวตั้งที่เป็นจำนวนเต็มลบ

เงื่อนไขของเศษยังเหมือนเดิม แม้ตัวตั้งเป็นลบ ให้เลือกพหุคูณของตัวหารที่ไม่เกินตัวตั้ง และใกล้ตัวตั้งที่สุด

ตัวอย่าง 4.2 จงหาเศษเมื่อหาร -22 ด้วย 5

วิธีคิด พหุคูณของ 5 ที่อยู่ติดกับ -22 คือ -25 และ -20 เลือก -25 ซึ่งไม่เกิน -22 แล้วเขียน $-22 = -25 + 3 = 5(-5) + 3$

ตอบ 3



ผลหารแบบเศษส่วนของ $-22 \div 5$ คือ $-22/5$ ส่วนผลหารจำนวนเต็มตามความสัมพันธ์ข้างต้นคือ -5 สองคำนี้ใช้ในความหมายต่างกัน

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

การหารลงตัวและเศษจากการหาร

4.2 การคำนวณโดยพิจารณาเฉพาะเศษ

ถ้า $a = dq + r$ ส่วน dq หารด้วย d ลงตัวอยู่แล้ว จึงไม่ส่งผลต่อเศษ การแทน a ด้วย r ช่วยลดขนาดตัวเลขเมื่อใช้การบวก ลบ คูณ หรือยกกำลังจำนวนเต็มบวก

สัญลักษณ์สมภาค

$$a \equiv r \pmod{d}$$

หมายถึง d หาร $a - r$ ลงตัว หรือ a และ r ให้เศษเดียวกันเมื่อหารด้วย d

ถ้า $a \equiv r \pmod{d}$ และ $b \equiv s \pmod{d}$ แล้ว

$$a + b \equiv r + s, \quad a - b \equiv r - s, \quad ab \equiv rs \pmod{d}$$

และ $a^k \equiv r^k \pmod{d}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k

เหตุผลของกฎการบวกเห็นได้จาก $a = dq + r$ และ $b = dt + s$ ทำให้ $a + b = d(q + t) + (r + s)$ ส่วนที่เป็นพหุคูณของ d ตัดออกจากการพิจารณาเศษได้ แต่ $r + s$ อาจยังไม่ใช่เศษสุดท้าย จึงต้องปรับให้ต่ำกว่า d

ตัวอย่าง 4.3 จำนวนสองจำนวนหารด้วย 7 เหลือเศษ 5 และ 6 จงหาเศษของผลบวก

วิธีคิด นำเศษมาบวกได้ $5 + 6 = 11$ แล้วหาร 11 ด้วย 7 อีกครั้ง ได้เศษ 4

ตอบ 4

ตัวอย่าง 4.4 ถ้า a, b หารด้วย 8 เหลือเศษ 3, 7 จงหาเศษของ $2a + b$

วิธีคิด คำนวณเฉพาะเศษ ได้ $2(3) + 7 = 13$ และ $13 = 8(1) + 5$ จึงมี $2a + b \equiv 5 \pmod{8}$

ตอบ 5

ตัวอย่าง 4.5 ถ้า N หารด้วย 5 เหลือเศษ 2 จงหาเศษของ $N^2 + N + 1$

วิธีคิด แทน N ด้วยเศษ 2 ได้ $2^2 + 2 + 1 = 7$ จากนั้น 7 หารด้วย 5 เหลือเศษ 2

ตอบ 2

เศษระหว่างคำนวณอาจติดลบได้ แต่คำตอบสุดท้ายต้องอยู่ในช่วง 0 ถึง $d - 1$ เช่น $-3 \equiv 4 \pmod{7}$ และ ไม่ใช้การหารหรือตัดตัวคูณในสมภาคโดยไม่มีเงื่อนไขรองรับ

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

การหารลงตัวและเศษจากการหาร

4.3 รอบซ้ำของเลขหลักหน่วย

เลขหลักหน่วยของจำนวนเต็มไม่ลบเท่ากับเศษเมื่อหารด้วย 10 การหาหลักหน่วยของกำลังสูงจึงพิจารณาเฉพาะเศษได้ พิจารณากำลังของ 7 ตามลำดับดังนี้

กำลัง	ค่าที่ได้	เลขหลักหน่วย
7^1	7	7
7^2	49	9
7^3	343	3
7^4	2401	1
7^5	16807	7
7^6	117649	9

การคูณด้วย 7 ในแต่ละขั้นทำให้หลักหน่วยเปลี่ยนจาก 7 เป็น 9 จาก 9 เป็น 3 จาก 3 เป็น 1 และจาก 1 กลับเป็น 7 จึงเกิดรอบซ้ำยาวสี่ตำแหน่ง

เลือกตำแหน่งในรอบด้วยเศษของเลขชี้กำลัง

สำหรับ 7^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เศษของ n เมื่อหารด้วย 4 1 2 3 0

เลขหลักหน่วยของ 7^n 7 9 3 1

เศษเป็นศูนย์หมายถึงตำแหน่งสุดท้ายของรอบ ไม่ใช่หลักหน่วยเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 4.6 จงหาเลขหลักหน่วยของ 7^{18}

วิธีคิด เขียน $18 = 4(4) + 2$ หมายถึงผ่านครบสี่รอบแล้วอีกสองตำแหน่ง จึงตรงกับหลักหน่วยของ 7^2 ซึ่งเป็น 9

ตอบ 9

ตัวอย่าง 4.7 จงหาเลขหลักหน่วยของ 7^{100}

วิธีคิด จาก $100 = 4(25)$ เศษเป็นศูนย์ จึงเลือกตำแหน่งที่สี่ของรอบ ซึ่งเป็น 1

ตอบ 1

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 4 | ข้อ 32-34

การหารลงตัวและเศษจากการหาร

ข้อ 32 จงหาเศษจากการหาร -47 ด้วย 6

ตอบ _____

ข้อ 33 ร้านเครื่องเขียนมีดินสอสองกล่อง เมื่อนับแยกแต่ละกล่องเป็นกลุ่มละ 12 แท่ง จะเหลือ 8 แท่งและ 7 แท่งตามลำดับ หากนำดินสอทั้งหมดมารวมกันแล้วจัดเป็นกลุ่มละ 12 แท่ง จะเหลือกี่แท่ง

ตอบ _____

ข้อ 34 จำนวนเต็ม a และ b หารด้วย 11 แล้วเหลือเศษ 4 และ 9 ตามลำดับ จงหาเศษจากการหาร $5a - 3b$ ด้วย 11

ตอบ _____